$h'(x) = -6x^2 - 12x + 18 = -6(x^2 + 2x - 3) = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$

$x = 1$ är den enda stat.punkten i $0 < x < \sqrt{\frac{9}{2}}$

$h(1) = 1 = f(1, \sqrt{8})$

Ändpunkterna på R_1, R_2, R_3 (dvs "hörnen" på D) är också intressanta.

$f(0,0) = 0$, $f(0,3) = -9$, $f\left(\sqrt{\frac{9}{2}}, \sqrt{\frac{9}{2}}\right) = 9\sqrt{\frac{9}{2}} - 36 < -9$

$\therefore$

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = 1, \quad \min_{(x,y)\in D} f(x,y) = 9\sqrt{\frac{9}{2}} - 36$$

<u>Anm</u> $H(x,y) = \begin{bmatrix} -14 & 4y \\ 4y & 4x-2 \end{bmatrix}$

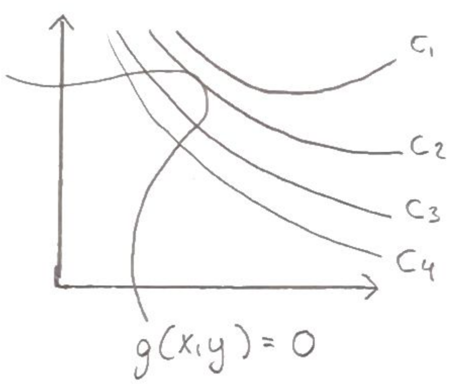
$$H\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right) = \begin{bmatrix} -14 & 4\sqrt{7/2} \\ 4\sqrt{7/2} & 0 \end{bmatrix} < 0$$

$\therefore \left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ är en sadelpunkt

---

<u>Avs 13.3</u>

Antas att vi söker största värdet av en funktion $f(x,y)$ under ett bivillkor $g(x,y) = 0$, dvs $\max_{g(x,y)=0} f(x,y)$



4 nivåkurvor till f, $f(x,y) = c_i$

Maximum antas i en punkt (a,b) där nivåkurvorna $g(x,y) = 0$ & $f(x,y) = f(a,b)$ tangerar varandra.

$\iff \nabla g(a,b)$ är parallell med $\nabla f(a,b)$

$\iff \nabla f(a+b) + \lambda \nabla g(a,b) = 0$, för något λ

$\therefore$ max/min av $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y) = 0$ antas i en stationär punkt till $f(x,y) + \lambda g(x,y) = L(x,y,\lambda)$ → Lagrange funktionen

Ex $f(x,y) = 2xy^2 - 7x^2 - y^2$ $\qquad \max\limits_{g(x,y)=0} f(x,y) = ?$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 9$

$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

$$\nabla L = 0 \iff \begin{cases} f_1 + \lambda g_1 = 0 \\ f_2 + \lambda g_2 = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{array}{lr} 2y^2 - 14x + \lambda 2x = 0 & (1) \\ 4y - 2y + \lambda 2y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 & (3) \end{array}$$

(2) $\iff y(2x - 1 + \lambda) = 0$

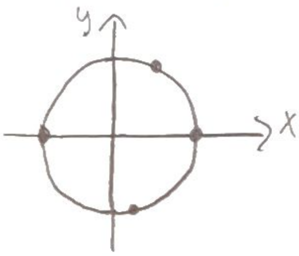
(2) $\Rightarrow$ $y = 0$ eller $\lambda \overset{(4)}{=} 1 - 2x$

(3) & (4) insatt i (1) ger:

$$\underbrace{9 - x^2}_{y^2} - 7x + \underbrace{(1-2x)}_{\lambda}x = 0 \iff x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$$

Möjliga maxpunkter: $(\pm 3, 0)$, $(1, \pm\sqrt{8})$



$f(\pm 3, 0) = -63$

$f(1, \pm\sqrt{8}) = 1$

$g(x,y) = 0$

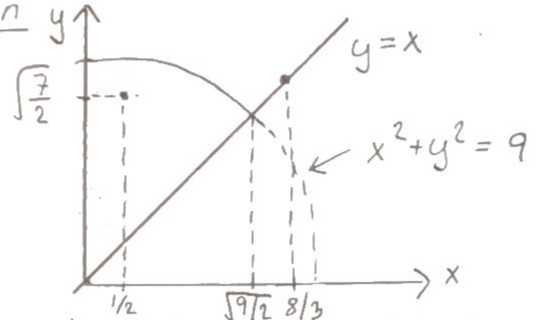
Matteföreläsning 3.3.3. Thomas 31/1-18 Ons

Anm: kriterier för att avgöra karaktär för de stationära punkterna för en funktion av tre eller fler variabler finns i sats 7 & 8 i avs. 10.7.

Forts. avs. 13.2

Upg: Låt $f(x,y) = 2xy^2 - y^2$. Bestäm största & minsta värdet av $f(x,y)$ på området $D: x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge x$

Lösn



I) (stat. punkter i det inre av D)

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 2y^2 - 14x = 0 \\ f_2(x,y) = 4xy - 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = 7x \\ y(2x-1) = 0 \end{cases}$$

$\iff (x,y) = (0,0)$ eller $\left(\frac{1}{2}, \pm\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ Obs! $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right) \notin D$

$$f(1/2, \sqrt{7/2}) = \frac{7}{2} - \frac{7}{4} - \frac{7}{2} = -\frac{7}{4}$$

II) $f(x,y)$ har inga singulära punkter

III) (Randen)

R_1: $x=0,\ 0<y<3,\ f(0,y) = -y^2$ saknar stationär punkt för $0<y<3$

R_2: $y=x,\ 0<x<\sqrt{\frac{9}{2}},\ f(x,x) = \underbrace{2x^3 - 8x^2}_{g(x)}$

$g'(x) = 6x^2 - 16x = 2x(3x-8) = 0 \iff x=0$ eller $x = \frac{8}{3} > \sqrt{\frac{9}{2}}$

så $g(x)$ saknar stat. punkter för $0<x<\sqrt{\frac{9}{2}}$

R_3: $y = \sqrt{9-x^2},\ 0<x<\sqrt{\frac{9}{2}},\ f(x, \sqrt{9-x^2}) = 2x(9-x^2) - 7x^2 - (9-x^2)$

$$= \underbrace{-2x^3 - 6x^2 + 18x - 9}_{h(x)}$$