Mekanikföreläsning 4.5.1. Carlo 25/4-18 Ons

Idag:

Energiprincipen (KAP 9)

Teori + lösningsstrategi

Räkneex: 9.16, 9.30

Imorgon:

Forts energiprincipen

Påbörjar rotationsrörelse (KAP 10)

Tre grundläggande principer:

1) Rörelsemängdsprincipen, $\boxed{\dot{\vec{p}} = \vec{F}}$ Hur en partikel rör sig under inverkan av en kraft. (translation → $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$)
2) Ett system av partiklar (en kropp) roterar kring en axel (Rörelsemängdsmomentprincipen) → rotation
3) Energiprincipen → förenklar problemlösningen (både vid translation & rotation)

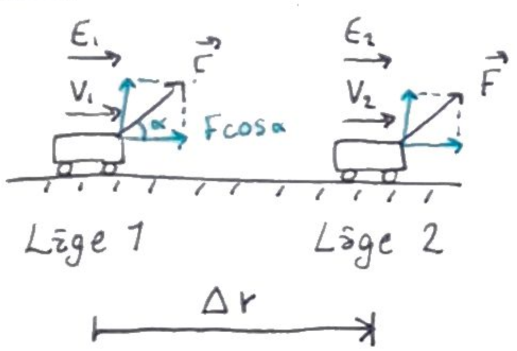
Energiprincipen - kap 9

Energiprincipen: $\boxed{\Delta E = U}$ ΔE - Energin hos en partikel

U - Arbete på partikeln

Totala energin för en partikel ändras om det uträttas ett arbete på den.

Ex



$V_2 > V_1 \Rightarrow E_2 > E_1$

$\Delta E > 0 \Rightarrow$ Det uträttas ett arbete U på partikeln.

$U = U(F, \Delta r) \Rightarrow \boxed{U = F \bullet \Delta r}$

($U = F \cdot \Delta r \cos\alpha$ i ex)

$\vec{F}$ = konstant under $\vec{\Delta r}$ i ex

Om F ej är konstant:

Def $dU = \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow$ $\boxed{U_{1-2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$

Vad är E för denna partikel? (vagnen i ex)

E står här för vagnens rörelseenergi = kinetisk energi

Beteckning: E_k eller T

Hur stor är $T = ?$

I vårt exempel är $E = T \Rightarrow$ Energiprincipen: $\Delta E = U \Leftrightarrow \Delta T = U$

$$T_2 - T_1 = U_{1-2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(\begin{aligned} &\vec{F} = m\vec{a} \\ &dr = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v}\, dt \end{aligned} \right) = \int_{t_1}^{t_2} m\vec{a} \cdot \vec{v}\, dt =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} \text{Allmänt kan rörelsen beskrivas} & \vec{a} = \dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n} \\ \text{med naturliga komponenter} & \vec{v} = v\hat{t} \end{array} \right] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m\left(\dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n}\right) \cdot v\hat{t}\, dt = \left[\begin{aligned} \hat{t} \cdot \hat{t} &= 1 \\ \hat{t} \cdot \hat{n} &= 0 \end{aligned} \right] = \int_{t_1}^{t_2} m\dot{v} v\, dt = \left[\dot{v}\, dt = \frac{dv}{dt} dt = dv \right]$$

$$= \int_{v_1}^{v_2} mv\, dv = m\int_{v_1}^{v_2} v\, dv = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_1}^{v_2} = \underbrace{\frac{mv_2^2}{2}}_{T_2} - \underbrace{\frac{mv_1^2}{2}}_{T_1}$$

Slutsats: $\boxed{T = \frac{mv^2}{2}}$

Lagen om den kinetiska energin: $\boxed{U_{1-2} = T_2 - T_1}$

Formellåda:

$\Delta E = U$

$U = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$ (om $\vec{F}$ är konstant) Enhet: $1\,Nm = 1\,J$

skalär

$dU = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow U_{1-2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$T = \frac{mv^2}{2}$

Lägesenergi / potentiell energi

Istället för arbetet $U_{1-2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ kan man definiera potentiell energi

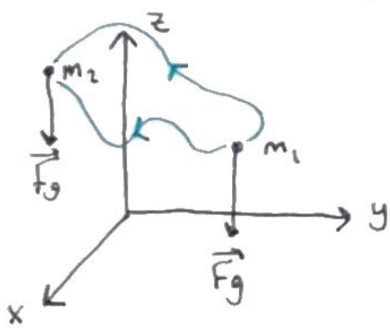
$E_p = V$:

$V(\vec{r}) \equiv - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, som är en funktion av endast $\vec{r}$

$\vec{r}_0 \leftarrow$ godtycklig

Fungerar bara om $\vec{F}$ är en konservativ kraft, dvs $U_{1-2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

är oberoende av vilken väg man tar mellan $\vec{r}_1$ & $\vec{r}_2$.



Tyngdkraft $\vec{F}_g = -mg\,\hat{z}$

Många olika vägar från läge 1 till 2

Exempel på icke-konservativ kraft:

Alla dissipativa krafter, tex friktionskraft, luftmotstånd

Ex

Potentiell energi för tyngdkraften

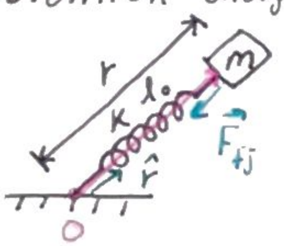
$$V(\vec r) = -\int_{\vec r_0}^{\vec r} \vec F\cdot d\vec r = \begin{bmatrix} \vec F = -mg\,\hat z \\ d\vec r = dx\,\hat x + dy\,\hat y + dz\,\hat z\end{bmatrix} = -\int_{\vec r_0}^{\vec r} (-mg\,\hat z)(dx\,\hat x+dy\,\hat y+dz\,\hat z) =$$

$$= \begin{bmatrix} \hat z\cdot\hat x = \hat z\cdot y = 0 \\ \hat z\cdot\hat z = 1\end{bmatrix} = mg\int_{z_0}^{z} dz = mg\,[z]_{z_0}^{z} = mg\,\underbrace{(z-z_0)}_{\Delta z} = mg\,z - \underset{\text{konstant}}{mg}\,\underset{\text{godtycklig}}{z_0}$$

Slutsats $\boxed{V(z) = mg\,z - V_0}$

Ex

Potentiell energi för fjäderkraften



Fjäderkonstant: k (styvhet)

Viloläge: l_0

Fjäderns totala längd: r

Hooks lag: $\boxed{\vec F_{fj} = -k\cdot(r-l_0)\,\hat r}$

$$V(\vec r) = -\int_{\vec r_0}^{\vec r} \vec F\cdot d\vec r = \int_{\vec r_0}^{\vec r} k(r-l_0)\,\hat r\cdot d\vec r = \begin{bmatrix} \vec F = F_r\,\hat r \\ d\vec r = \frac{d\vec r}{dt}\,dt = \vec v\,dt = \\ = (\dot r\,\hat r + r\dot\theta\,\hat\theta + \dot z\,\hat z)\,dt \end{bmatrix}$$

$$= \int_{t_0}^{t} (F_r\,\hat r)\cdot(\dot r\,\hat r + r\dot\theta\,\hat\theta + \dot z\,\hat z)\,dt = -\int_{t_0}^{t} F_r\,\dot r\,dt = \dot r = \left[\frac{dr}{dt} \Rightarrow \dot r\,dt = dr\right] =$$

$$= -\int_{r_0}^{r} F_r\,dr = \cancel{-}\int_{r_0}^{r} \cancel{-}k(r-l_0)\,dr = k\int_{r_0}^{r}(r-l_0)\,dr = [\text{Välj } r_0 = l_0]$$

$$\boxed{\text{Formellsida: Tyngdkraft: } V(z) = mgz - V_0 \quad \text{Fjäderkraft: } V(\Delta l) = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2}$$

$$k\int_{l_0}^{r} (r - l_0)\,dr = \left[\begin{array}{l|l} s = r - l_0 & r = l_0 \to s = 0 \\ ds = dr & r = r \to s = r - l_0 \end{array}\right] = k\int_0^s s\,ds = \frac{1}{2}ks^2 =$$

$$= \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$$

Slutsats: $\boxed{V(\Delta l) = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2}$

Tillbaka till energiprincipen:

$\Delta E = U$ eller $E_2 - E_1 = U_{1-2}$

Om endast konservativa krafter:

$$U_{1-2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} =$$

$$= V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) = V_1 - V_2$$

$\Rightarrow U_{1-2} = V_1 - V_2$

$\Rightarrow E_2 - E_1 = V_1 - V_2$

Om $E = T \Rightarrow T_2 - T_1 = V_1 - V_2 \Rightarrow T_2 + V_2 = T_1 + V_1$

Def Totala mekaniska energin $E_{mek} = T + V \Rightarrow E_2 = E_1$

$\Rightarrow$ Den totala energin är bevarad.

endast om krafterna är konservativa

Om det även finns icke-konservativa krafter

$$\Delta E_{mek} = \Delta(T + V) = U_{1-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{(T_2 - T_1) + (V_2 - V_1) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

konservativa   icke-konservativa kraften