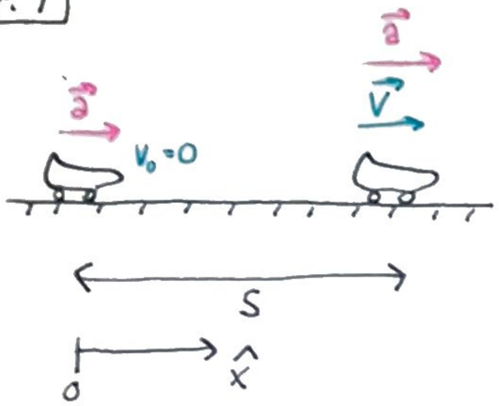
Mekanik-föreläsning 4.4.1. Carlo 17/4-18 Tis

$\boxed{7.9}$



$a = a_0 - kv^2$ (1)

$a_0 =$ konstan, $k =$ konstant

Bestäm s

$a_0 = 2\ m/s^2$, $k = 5 \cdot 10^{-5}\ m^{-1}$, $v = 259\ km/h$

Lösning

kinematikuppgift $\rightarrow$ Ta fram samband mellan s, v, a

$$\left.\begin{aligned} v &= \dot{s} \\ a &= \dot{v} = \ddot{s} \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{diffekvation}$$

Ekv (1): $a = a_0 - ku^2$ $\Rightarrow$ $s = s(t)$, ej intressant, ej linjär diffekv.

$\ddot{s} = a_0 - k\dot{s}^2$ $\Rightarrow$ ej framgångsrik

$\dot{v} = a_0 - kv^2$

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\overbrace{\frac{ds}{dt}}^{v} = v\frac{dv}{ds}$$

$v = v(s(t))$

$$\left.\begin{aligned} \dot{v} &= a_0 - kv^2 \\ \dot{v} &= v\frac{dv}{ds} \end{aligned}\right\} \rightarrow v\frac{dv}{ds} = a_0 - kv^2 \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{a_0 - kv^2}{v}$$

$$\rightarrow \underbrace{\int_0^v \frac{v}{a_0 - kv^2}\,dv}_{I} = \underbrace{\int_0^s ds}_{s}$$

$$I = \int_0^v \frac{v}{a_0 - kv^2}\,dv = \int_0^v v(a_0 - kv^2)^{-1}\,dv = -\frac{1}{2k}\left[\ln\ a_0 - kv^2\right]_0^v =$$

$$= -\frac{1}{2k}\left[\ln(a_0 - kv^2) - \ln(a_0)\right] = -\frac{1}{2k}\ln\frac{a_0 - kv^2}{a_0} = -\frac{1}{2k}\ln\left(1 - \frac{kv^2}{a_0}\right)$$

$$\Rightarrow s = -\frac{1}{2k}\ln\left(1 - \frac{kv^2}{a_0}\right)$$

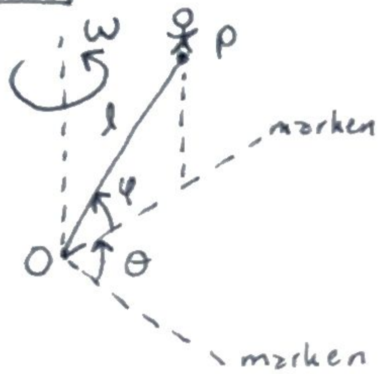
Tips lösningsmetod

Ta fram en differentialekvation

Kolla om funktionen beror på tex t eller s.

Kolla om det är en kraftekvation eller tex acceleration

$\boxed{7.17}$



$\dot{l}$ = konstant , $\ddot{l} = 0$

ω = vinkelhastigheten kring vertikallinjen

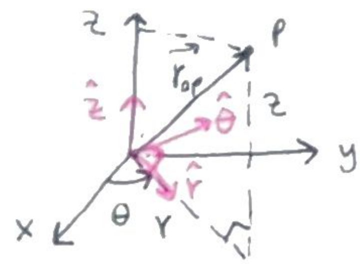
ω = konstant (rad/s) , $\omega = \dot{\theta}$

φ = elevationsvinkeln $\dot{\varphi}$ = konstant

Bestäm brandmannens $\vec{v}$ & $\vec{a}$

Lösning

Cylinderkoordinater:



Teoriruta:

$\vec{r}_{op} = r\hat{r} + z\hat{z}$ (obs att $\hat{r} = \hat{r}(\theta)$)

($\hat{r}$ & $\hat{\theta}$ ligger i xy-planet)

$\vec{v} = \dot{\vec{r}}_{op} = \frac{d}{dt}(r\hat{r} + z\hat{z}) = \ldots = \dot{r}\hat{r} + \underbrace{r\dot{\theta}\hat{\theta}}_{\frac{d}{dt}\hat{r}} + \dot{z}\hat{z}$

$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z})$

$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z} = V_r\hat{r} + V_\theta\hat{\theta} + V_z\hat{z}$

$V_r = \dot{r}$

$r = l \cdot \cos\varphi \longrightarrow \dot{r} = \dot{l}\cos\varphi + l\frac{d}{dt}\cos\varphi = \dot{l}\cos\varphi - l\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$

$= \dot{l}\cos\varphi - l\dot{\varphi}\sin\varphi$

$V_\theta = r\dot\theta = l\cos\varphi \cdot \omega = l\omega\cos\varphi$

$V_z = \dot z$

$z = l\sin\varphi \Rightarrow \dot z = \dot l\sin\varphi + l\frac{d}{dt}\sin\varphi = \dot l\sin\varphi + l\dot\varphi\cos\varphi$

Svar: $\begin{cases} V_r = \dot l\cos\varphi - l\dot\varphi\sin\varphi \\ V_\theta = l\omega\cos\varphi \\ V_z = \dot l\sin\varphi + l\dot\varphi\cos\varphi \end{cases}$

för accelerationen:

$\vec a = \dot{\vec v} = \frac{d}{dt}(\dot r\hat r + r\dot\theta\hat\theta + \dot z\hat z) = (\ddot r - r\dot\theta^2)\hat r + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)\hat\theta + \ddot z\hat z$

Kapitel 8 Dynamik

Statik

Frilägg, rita krafter, välj koordsystem

Ställ upp kraftekv, specialfall av N2: $F = ma$ (vid jämvikt: $a = 0 \to F = 0$)

Kinetik

Ej jämvikt, $a \neq 0 \Rightarrow F = ma$

Frilägg, rita krafter

Välj koordsystem (kartesiska, cylinder, naturliga)

Ställ upp kraftekv (rörelseekv)

Kraftekvationerna $\vec F = m\vec a$

Kartesiska (x, y, z)

$\hat x: \sum F_x = ma_x$

$\hat y: \sum F_y = ma_y$

$\hat z: \sum F_z = ma_z$

Cylinder (r, θ, z)

$\hat r: \sum F_r = ma_r = m(\ddot r - r\dot\theta^2)$

$\hat\theta: \sum F_\theta = ma_\theta = m(r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)$

$\hat z: \sum F_z = ma_z = m\ddot z$

Naturliga

tangentialkomponent

normala komponenten

krökningsradien

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{v^2}{r} \\ a_t = \dot{v} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{v^2}{r}\hat{n} + \dot{v}\hat{t}}$$