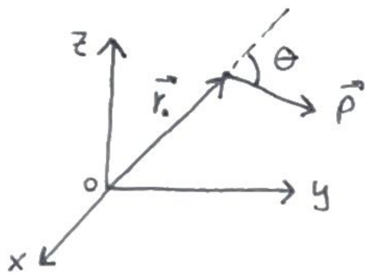
Mekanikföreläsning 4.6.1. Carlo $^2/_5$ - 18 Ons

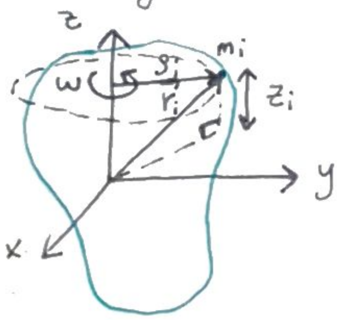
Forts från förra veckan

Rörelsemängdsprincipen: $\boxed{\dot{\vec{H}}_o = \vec{M}_o}$ där $\vec{H}_o \equiv \vec{r}_o \times \vec{p}$ & $\vec{M}_o = \vec{r}_o \times \vec{F}$



För en partikel vid läge $\vec{r}_o$ & med rörelsemängden $\vec{p}$

För en stel kropp som roterar med vinkelhastigheten ω kring en fix axel längs med $\hat{z}$:



Partikel i kroppen:

$$\vec{r}_i = \rho_i \hat{r} + z_i \hat{z}$$

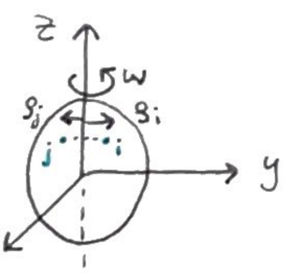
$$\vec{v}_i = \underbrace{\dot{\rho}_i}_{0} \hat{r} + \rho_i \underbrace{\dot{\theta}_i}_{\omega} \hat{\theta} + \underbrace{\dot{z}_i}_{0} \hat{z} = \rho_i \omega \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_{O_i} = \vec{r}_{O_i} \times \vec{p}_i = (\rho_i \hat{r} + z_i \hat{z}) \times (m_i \vec{v}_i) = (\rho_i \hat{r} + z_i \hat{z}) \times (m_i \rho_i \omega \hat{\theta}) =$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{z} \\ \hat{z} \times \hat{\theta} = -\hat{r} \end{bmatrix} = m_i \rho_i^2 \omega \hat{z} - m_i \rho_i \omega z_i \hat{r}$$

Kroppens totala rörelsemängd: $\vec{H}_o = \sum_i \vec{H}_{O_i} = \underbrace{\sum_i m \rho_i^2 \omega \hat{z}}_{\omega\left(\sum_i m_i \rho_i^2\right)\hat{z}} - \overbrace{\underbrace{\sum_i m \rho_i \omega z_i \hat{r}}_{=0, \text{ om rotationssym. kropp}}}^{\omega\left(\sum_i m_i \rho_i z_i\right)\hat{r}}$

Om kroppen är rotationssymmetrisk kring z-axeln



$\rho_j = -\rho_i \quad \rightarrow \quad \omega\left(\sum_i m_i \rho_i z_i\right) \hat{r} = 0$

$\Rightarrow \vec{H}_o = \omega \left(\sum_i m_i \rho_i^2\right) \hat{z}$ ← riktningen hos rotationsaxeln

vinkelhastighet (hur fort kroppen roterar)

kroppens massfördelning kring rotationsaxeln (z)

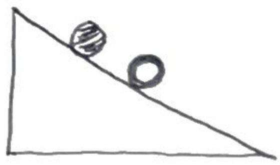
Rörelsemängdsmomentet för en stel kropp beror på:

1) Rotationshastigheten (ω)

2) Hur mycket kroppens massa är utspridd från rotationsaxeln ($\sum_i m_i \rho_i^2$)

Ett mått på kroppens tröghet mot rotation.

Rullande cylindrar:



<u>Definition:</u> Tröghetsmoment: $\boxed{I = \sum_i m_i \rho_i^2}$ (enhet: kgm^2)

$\left(\text{eller: } I = \int_V \rho^2 \, dm \right)$

$\Rightarrow$ För en stel kropp: $\boxed{\vec{H}_o = I \omega \hat{z}}$ (jmf med $\vec{p} = m\vec{v}$)

Tröghet Fart

Tröghet Hastighet

Rörelsemängdsmomentprincipen för en stel kropp:

$\dot{\vec{H}}_o = \vec{M}_o$

$\vec{H}_o = I \omega \hat{z} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_o = \frac{d}{dt}(I \omega \hat{z}) = I \hat{z} \cdot \frac{d}{dt}\omega = I \dot{\omega} \hat{z}$

<u>Definition:</u> Vinkelacceleration $\alpha = \dot{\omega} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_o = I \alpha \hat{z}$

Sätt $\vec{M}_o = M_z \hat{z} \Rightarrow \boxed{I \alpha = M_z}$ (jmfr m. $ma = F$)

Tröghet vinkelacc

Tröghet acc det som orsakar acc

Det som orsakar vinkelacc

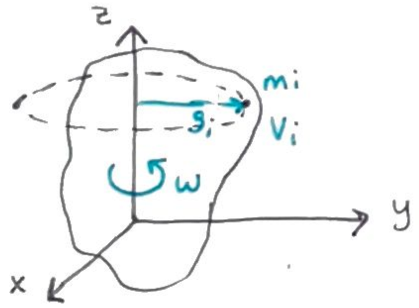
Sammanfattning

Translation	Rotation kring z-axeln
$p = mv$	$H_z = I_z \omega$
$ma = F$	$I_z \alpha = M_z$
$T = \frac{1}{2} mv^2$	$I_z = \sum_i m_i \rho_i^2$

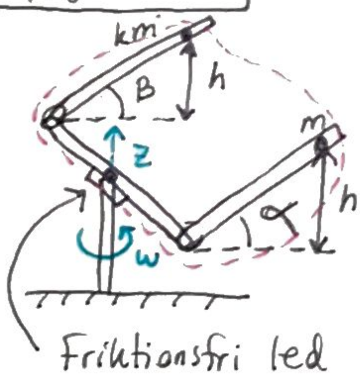
Rotationskinetisk energi för en roterande stel kropp

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = [v_i = \rho_i \omega] = \frac{1}{2} m_i (\rho_i \omega)^2 = \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2$$

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \boxed{\sum_i m_i \rho_i^2} = \frac{1}{2} I \omega^2$$



Uppgift 10.4



$\beta > \alpha$

h = kulornas starthöjd

Släpps från vila

Allt har försumbar massa jmf m. kulorna

Kulorna träffar skålarna samtidigt

Bestäm $\omega = ?$

Stel kropp, fix rotationsaxel $\hat{z}$

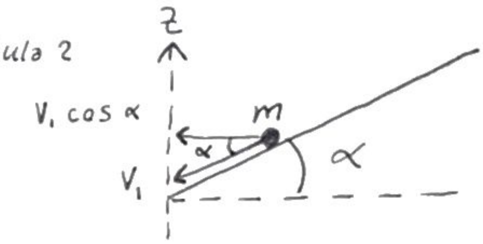
Rörelsemängdsmomentsprincipen : $\dot{H}_z = M_z$

Systemet: Staven + kulorna

Jämför systemet strax före kollisionen & strax efter kollisionen.

$M_z = 0 \Rightarrow H_z = 0$ eller $H_{z\,före} = H_{z\,efter}$

(Jmfr m. rak stöt: $P_{före} = P_{efter}$)



Före: $H_{z\,före} = \underset{0,\ \text{ty } \omega_{före} = 0}{H_{z\,armen}} + H_{z\,kula\,1} + H_{z\,kula\,2}$

$H_{z\,kula\,1} = -l \cdot m \underbrace{v_1 \cos\alpha}$

Hastighetens komponent
⊥ mot z-axeln

$H_{z\,kula\,2} = l \cdot km \cdot v_2 \cos\beta$

$\Rightarrow H_{z\,före} = -l m v_1 \cos\alpha + l\, km\, v_2 \cos\beta$

Energiprincipen $\Rightarrow \begin{cases} mgh = \frac{1}{2} m v_1^2 & \text{(kula 1)} \\ kmgh = \frac{1}{2} km v_2^2 & \text{(kula 2)} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} V_1 = \sqrt{2gh} \\ V_2 = \sqrt{2gh} \end{cases} \Rightarrow V_1 = V_2 = \sqrt{2gh}$

$\Rightarrow \boxed{H_{z\,före} = l m \sqrt{2gh}\,(-\cos\alpha + k\cos\beta)}$

Efter:

$H_{z\,efter} = H_{z\,armen} + H_{z\,kula\,1} + H_{z\,kula\,2} =$

$0 + l \cdot m \ldots\ldots$ (Ej smidigaste sättet, dela ej upp)

$= \Big[$ betrakta en stel kropp  $\Big] = I_z \omega = \left(\sum_i m_i s_i^2\right) \omega =$

$$(ml^2 + kml^2)\,\omega = ml^2\omega\,(1+k)$$

$H_{z\,före} = H_{z\,efter}$

$$\Rightarrow lm\sqrt{2gh}\,(\cos\alpha + k\cos\beta) = ml^2\omega\,(1+k)$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{2gh}\,(\cos\alpha + k\cos\beta)}{l\,(1+k)}$$