1/10-18 Föreläsning 9

Väntevärden

$$\Psi = \sum_n c_n f_n$$

$$\Rightarrow \langle O \rangle = \langle \Psi, \hat{O}\Psi \rangle = \langle \sum_m c_m f_m, \hat{O} \sum_n c_n f_n \rangle =$$

$$= \sum_m \sum_n c_m^* c_n \langle f_m, \hat{O} f_n \rangle = \sum_m \sum_n c_m^* c_n \langle f_m, \Omega_n f_n \rangle =$$

egenvärde

$$= \sum_m \sum_n c_m^* c_n \Omega_n \langle f_m | f_n \rangle = \sum_m \sum_n c_m^* c_n \Omega_n \delta_{mn} =$$

$$= \sum_n |c_n|^2 \Omega_n$$

Ex. Rörelsemängd:

Egenfunktionerna till $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ med reella egenvärden ges av $f_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp(ipx/\hbar)$

där $\hat{p} f_p = p f_p$

$$\Rightarrow C(p) = \langle f_p | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,t) e^{-ipx/\hbar} dx$$

$C(p,t)$ kallas för rörelsemängdsvågfunktionen, brukar benämnas $\Phi(p,t)$.

$$\begin{cases} \Phi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,t) e^{-ipx/\hbar} dx \\ \Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p,t) e^{ipx/\hbar} dp \end{cases}$$

Sannolikheten att mäta rörelsemängden i intervallet $[p, p+dp]$ ges utav:

$$|\Phi(p,t)|^2 dp.$$

Jämföra med sannolikheten att mäta partikeln i läge $[x, x+dx]$

$$|\Psi(x,t)|^2 dx$$

<u>Osäkerhetsrelationen (eller obestämbarhetsrelationen):</u>

Variansen av en observabel A för ett tillstånd Ψ ges av:

hermitsk operator

$$\sigma_A^2 = \langle (A-\langle A\rangle)^2\rangle = \langle \Psi | (A-\langle A\rangle)^2 \Psi\rangle =$$

$$= \langle (A-\langle A\rangle)\Psi | (A-\langle A\rangle)\Psi\rangle \equiv \langle f|f\rangle$$

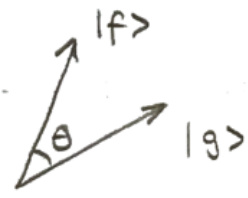
där $|f\rangle \equiv |(A-\langle A\rangle)\Psi\rangle$

$\forall$ annan observabel B gäller $\sigma_B^2 = \langle g|g\rangle$ där $|g\rangle \equiv |(B-\langle B\rangle)\Psi\rangle$

Schwarz olikhet:

$$\langle f|f\rangle\langle g|g\rangle \geq |\langle f|g\rangle|^2$$

(vektoranalys:



$\langle f|f\rangle \sim |f|^2$

$\langle g|g\rangle \sim |g|^2$

$\langle f|g\rangle \sim |f||g|\cos\theta$

$\Rightarrow \quad |f|^2|g|^2 \geq |f|^2|g|^2\cos^2\theta$).

$\langle f|g\rangle = z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$

$\Rightarrow |z|^2 = |\mathrm{Re}(z)|^2 + |\mathrm{Im}(z)|^2 \geq |\mathrm{Im}(z)|^2$

$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*) = \frac{1}{2i}(\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle)$

$$\Rightarrow \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle = \sigma_A^2\sigma_B^2 \geq |\langle f|g\rangle|^2 = |z|^2 \geq$$

$$\geq \left[\frac{1}{2i}(\langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle)\right]^2$$

$$\langle f|g\rangle \equiv \langle (A-\langle A\rangle)\psi \,|\, (B-\langle B\rangle)\psi\rangle$$

$$= \langle \psi | (A-\langle A\rangle)(B-\langle B\rangle)\psi\rangle$$

$$= \langle \psi | (AB - A\langle B\rangle - \langle A\rangle B + \langle A\rangle\langle B\rangle)\psi\rangle$$

$$= \langle \psi | \hat{A}\hat{B}\psi\rangle - \langle B\rangle\langle\psi|\hat{A}\psi\rangle - \langle A\rangle\langle\psi|\hat{B}\psi\rangle$$

$$+ \langle A\rangle\langle B\rangle \underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{\equiv 1}$$

$$= \langle AB\rangle - \langle B\rangle\langle A\rangle - \cancel{\langle A\rangle\langle B\rangle} + \cancel{\langle A\rangle\langle B\rangle}$$

$$\langle g|f\rangle = \langle f|g\rangle^* = \langle BA\rangle - \langle B\rangle\langle A\rangle$$

$$\Rightarrow \langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle = \langle AB\rangle - \langle BA\rangle = \langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle$$

där $[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

$$\Rightarrow \sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \underbrace{\left(\frac{1}{2i}\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right)^2}_{\text{ALLTID reellt!}} \quad \leftarrow \text{osäkerhetsrelation}$$

Ex. $\hat{A} = \hat{x}$, $\hat{B} = \hat{p}$

Kommentator: $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$

$$\Rightarrow \langle[\hat{x},\hat{p}]\rangle = i\hbar$$

$$\Rightarrow \sigma_x^2\sigma_p^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle[\hat{x},\hat{p}]\rangle\right)^2 = \left(\frac{1}{2i}\, i\hbar\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\sigma_x\sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \text{(osäkerhetsrelation för } x \text{ \& } p\text{)}$$

ofta låter man $\sigma_x \longrightarrow \Delta x$

$\sigma_p \longrightarrow \Delta p$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Alla observabler m. icketriviala kommentatorer ger upphov till icketriviala osäkerhetsrelationer. Sådana observabler kallas för <u>inkompatibla</u>.

"Osäkerhetsrelationen" för tid och energi

Tid ej observabel $\longrightarrow$ ingen operator.

Vad betyder $\Delta t \Delta E \geq \hbar/2$?

Tid: mått på förändring

Titta på tidsutvecklingen av väntevärdet.

Observabel, O, tillstånd $\psi \Rightarrow \frac{d}{dt}\langle O\rangle = \frac{d}{dt}\langle\psi|\hat{O}\psi\rangle$

$$= \langle \frac{\partial\psi}{\partial t}|\hat{O}\psi\rangle + \langle\psi|\frac{\partial\hat{O}}{\partial t}\psi\rangle + \langle\psi|\hat{O}\frac{\partial\psi}{\partial t}\rangle$$

Schrödingerekvationen: $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle O\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\langle\hat{H}\psi|\hat{O}\psi\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\psi|\hat{O}\hat{H}\psi\rangle + \langle\frac{\partial\hat{O}}{\partial t}\rangle$$

$\hat{H}$ hermitsk $\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle O\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\langle\psi|\hat{H}\hat{O}\psi\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\psi|\hat{O}\hat{H}\psi\rangle$

$$+ \langle\frac{\partial\hat{O}}{\partial t}\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle O\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{O}]\rangle + \langle\frac{\partial\hat{O}}{\partial t}\rangle$$

Om $\hat{O}$ ej funktion av tiden $\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle O\rangle = \frac{i}{\hbar}\cdot\langle[\hat{H},\hat{O}]\rangle$

Låt $\hat{A} \equiv \hat{H}$, $\hat{B} \equiv \hat{O}$ i vår osäkerhetsrelation

$$\Rightarrow \sigma_H^2\sigma_O^2 \geq \left[\frac{1}{2i}\langle[\hat{H},\hat{O}]\rangle\right]^2 = \left[\frac{1}{2i}\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dt}\langle O\rangle\right]^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{d\langle O\rangle}{dt}\right)^2$$

$$\sigma_H^2\sigma_O^2 \geq \frac{\hbar^2}{2}\left|\frac{d\langle O\rangle}{dt}\right|$$

Låt $\sigma_H \equiv \Delta E$

$$\Delta t \equiv \frac{\sigma_O}{|d\langle O\rangle/dt|} \quad \Rightarrow \quad \Delta t\Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

Vågfunktioner och tillståndsvektorer

Tillstånd i ett system ges av tidsberoende vektorer i Hilbertrummet: $|S(t)\rangle$

Vågfunktionen är då projektionen av $|S(t)\rangle$ på $|x\rangle$

$$\psi(x,t) \equiv \langle x | S(t) \rangle$$

Rörelsemängdsvågfunktionen ges då av

$$\boxed{\phi(p,t) \equiv \langle p | S(t) \rangle}$$

ψ och ϕ är samma tillstånd i olika representationer. ψ och ϕ innehåller lika mycket information.

Observabler $\rightarrow$ operatorer, dvs linjära transformationer av tillståndsvektorer.

$|\beta\rangle = \hat{O}|\alpha\rangle$, $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in L^2$.

Vektorerna kan skrivas i en bas $\{|e_n\rangle\}$ dvs.

$|\alpha\rangle = \sum_n a_n |e_n\rangle$ där $a_n \equiv \langle e_n | \alpha \rangle$

Operatorer kan skrivas i termer av basen $\{|e_n\rangle\}$:

$$O_{mn} = \langle e_m | \hat{O} e_n \rangle = \langle e_m | \hat{O} | e_n \rangle$$

$$\Rightarrow |\beta\rangle = \hat{O}|\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow b_m = \langle e_m | \beta \rangle = \sum_n O_{mn} a_n$$

Dirac-notation:

$\forall$ $|\alpha\rangle$ $\exists$ en dual $\langle\alpha|$, def. via $\langle\alpha|f\rangle = \int \alpha^* f \, dx$

$\langle\alpha|$ - bra , $|\alpha\rangle$ - ket

Operatorer kan bildas av bras och kets:

ex. projektionsoperatorn: $\hat{\mathbb{P}} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$

Tar ut komponenten längs $|\alpha\rangle$ av en vektor $|\beta\rangle$

$$\hat{\mathbb{P}}|\beta\rangle = (|\alpha\rangle\langle\alpha|)|\beta\rangle = |\alpha\rangle(\langle\alpha|\beta\rangle) = \underbrace{(\langle\alpha|\beta\rangle)}_{\text{komp. av } |\beta\rangle \text{ längs } |\alpha\rangle}|\alpha\rangle$$

$\{|e_n\rangle\}$ ortonormal bas:

Enhetsoperatorn: $\hat{\mathbb{1}} = \sum_n |e_n\rangle\langle e_n|$

$$\Rightarrow \hat{\mathbb{1}}|\alpha\rangle = \sum_n |e_n\rangle\langle e_n|\alpha\rangle = \sum_n (\langle e_n|\alpha\rangle)|e_n\rangle =$$

$$= \sum_n a_n|e_n\rangle = |\alpha\rangle$$

p.s.s för kontinuerliga spektra: