27/9-18 Föreläsning 8

Hermitska operatorer och deras egenfktner

(Hermitska operatorer har komplex konjugat som liknar dem själv).

Egenfunktionerna till Hermitska operatorer representerar tillstånd. Normaliserbara tillstånd $\longrightarrow$ diskret spektrum.

Icke normaliserbara tillstånd $\longrightarrow$ kontinuerligt spektrum

Normaliserbara egenfunktioner till hermitska operatorer

1. Deras egenvärden är reella!

Bevis: $\hat{O}$ - hermitsk operator

f - dess egenfunktion m. egenv. Ω

$\Leftrightarrow \quad \hat{O}f = \Omega f$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle f|\hat{O}f\rangle}_{} \underset{\text{pga. hermitsk}}{=} \langle \hat{O}f|f\rangle$$

$$\equiv \int f^*(x)\,\hat{O}f(x)\,dx$$

$$= \int f^*(x)\,\Omega f(x)\,dx = \Omega \int f^*(x) f(x)\,dx = \Omega\langle f|f\rangle$$

MEN $\langle \hat{O}f|f\rangle = \int (\hat{O}f(x))^* f(x)\,dx = \int (\Omega f(x))^* f(x)\,dx =$

$$= \Omega^* \int f^*(x) f(x)\,dx = \Omega^* \langle f|f\rangle \Rightarrow \Omega = \Omega^*$$

dvs. $\Omega \in \mathbb{R}$, viktigt då vi vill mäta reella storheter!

2. Egenfunktioner som har diskreta egenvärden är <u>ortogonala</u>.

Bevis: $\left.\begin{array}{l}\hat{O}f(x) = \Omega f(x) \\ \hat{O}g(x) = \Omega' g(x)\end{array}\right\}$ två olika egenfkner m två olika egenv.

Då gäller att $\langle f|\hat{O}g\rangle = \langle \hat{O}f|g\rangle$

$\langle f|\hat{O}g\rangle = \langle f|\Omega' g\rangle = \Omega' \langle f|g\rangle$

$\langle \hat{O}f|g\rangle = \langle \Omega f|g\rangle = \Omega^* \langle f|g\rangle = \Omega \langle f|g\rangle$

Om $\Omega \neq \Omega' \Rightarrow \langle f|g\rangle = 0$

Degenererade tillstånd $(\Omega = \Omega') \Rightarrow$ ortogonaliserings-process.

Krav (på de hermitska operatorerna):
Våra hermitska operatorer* genererar en fullst. mängd egenfunktioner. $\Rightarrow$ En godtycklig funktion i vårt Hilbertrum kan uttryckas som en linjärkomb. av egenfunktionerna.

* (som svarar mot observabler)

Kontinuerliga spektra

Kontinuerligt spektrum till hermitsk operator
$\Rightarrow$ ej normaliserbara egenfunktioner.
Sats ① och ② för diskreta spektra gäller ej för kontinuerliga spektra! VIKTIGT!

Ex. 3.2

Egenfunktioner och egenvärden till rörelsemängds-operatorn $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

Låt $f_p(x)$ vara egenfunktion till $\hat{p}$ med egenv. p:

$$\hat{p} f_p(x) = p f_p(x)$$

$$-i\hbar \frac{\partial f_p}{\partial x} = p f_p$$

$$\Rightarrow f_p(x) = A \exp(ipx/\hbar)$$

$$\langle f_{p'} | f_p \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f_{p'}^*(x) f_p(x)\, dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(p-p')x/\hbar)\, dx$$

<u>Krav:</u> $p \in \mathbb{R} \quad \forall \; p$

$$\langle f_{p'} | f_p \rangle = 2\pi\hbar |A|^2 \delta(p-p')$$

$$\left(\delta(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ipx)\, dx \right)$$

"Normalisera" $\longrightarrow$ få att $|A|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar}$

$$\Rightarrow \langle f_{p'} | f_p \rangle = \delta(p-p')$$

$\{f_p\}$ är <u>Diracortonormaliserade.</u>

$\because$ Egenfunktioner m. reella egenv. är också fullständiga $\Rightarrow$ alla kvadratintegrabla funktioner $f(x)$ kan skrivas som en integral av f_p över spektrat $\{p\}$.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) f_p(x)\, dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} c(p) \exp(ipx/\hbar)\, dp$$

där $c(p) = \langle f_p | f \rangle$

$f(x)$ är ett vågpaket.

Våglängd $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$ (för varje vågkomp.)

<u>de Broglie!</u>

Ex. 3.3 (i boken)

Låt $g_y(x)$ vara en egenfunktion till positionsoperatorn $\hat{x}$, med egenv. y.

$$\hat{x}\, g_y(x) = y\, g_y(x)$$

$$\Rightarrow g_y(x) = A\,\delta(x-y)$$

inspiration

Diracortonormalitet: $\langle g_{y'} | g_y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g_{y'}^*(x)\, g_y(x)\, dx$

$$= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y')\,\delta(x-y)\,dx = |A|^2\,\delta(y-y')$$

$A = 1 \Rightarrow g_y(x) = \delta(x-y)$

Godtyckligt tillstånd:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(y)\, g_y(x)\, dy \quad \text{där} \quad c(y) = f(y)$$

Hilbertrum $\longleftrightarrow L^2$ kvadratintegrabla tillstånd.

Egenfunktionerna med kontinuerliga spektra bor inte i Hilbertrummet! Ej fysikaliska tillstånd!

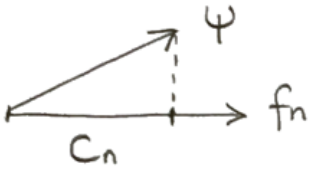
<u>Dock:</u>
- Reella egenvärden
- Diracortonormaliserade
- Fullständiga

Generaliserad statistisk tolkning

Sannolikhetstolkningen, eller statistiska tolkningen, av kvantmekaniken kan uttryckas med våra nya verktyg $|f\rangle$, $\langle f|$, $\langle f|g\rangle$.

1) Givet en observabel $O(x,p)$ och ett tillstånd $\Psi(x,t)$ kommer varje mätning av $O(x,p)$ att resultera i ett av egenvärdena till operatorn $\hat{O}(x, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x})$ $\boxed{\hat{O}\Psi = \Omega\Psi}$

2) Om spektrat till $\hat{O}$ är diskret är sannolikheten att erhålla egenvärdet Ω_n, för egenfunktionen $f_n(x)$, givet av $|C_n|^2$, där $C_n = \langle f_n|\Psi\rangle$



3) Om spektrat till $\hat{O}$ är kontinuerligt med reella egenvärden $\Omega(z)$ och Diracortonormerade egenfunktioner $f_z(x)$ så ges sannolikheten att mäta $\Omega(z)$ i intervallet $[z, z+dz]$ av $|C(z)|^2 dz$ där $c(z) = \langle f_z|\Psi\rangle$

$|C_n|^2$ sannolikheten att mäta Ω_n. Då vill vi att

$$\sum_n |C_n|^2 = 1.$$

<u>Check</u>: $1 = \langle\Psi|\Psi\rangle = \langle \sum_m C_m f_m | \sum_n C_n f_n\rangle =$

$$= \sum_m \sum_n C_m^* C_n \langle f_m|f_n\rangle = \sum_m \sum_n C_m^* C_n \delta_{mn} = \sum_n |C_n|^2$$

<u>Väntevärdet</u>: Observabel $O \longrightarrow$ operator $\hat{O}$

$$\langle O \rangle = \langle \Psi | \hat{O} \Psi \rangle = \langle \sum_m c_m f_m | \hat{O} \sum_n c_n f_n \rangle =$$

$$= \langle \sum_m c_m f_m | \sum_n c_n \hat{O} f_n \rangle = \sum_m \sum_n c_m^* c_n \Omega_n \underbrace{\langle f_m | f_n \rangle}_{\delta_{mn}} =$$

$\hat{O} f_n = \Omega_n f_n$

$$= \sum_n |c_n|^2 \Omega_n$$ —— egenv. för f_n

sannolikheten att mäta Ω_n