20/9-18 Föreläsning 6

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$$

grundtillståndet för harmoniska oscillator

Fri partikel

Stationära SE för $V(x)=0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0 \quad , \quad k = \pm\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

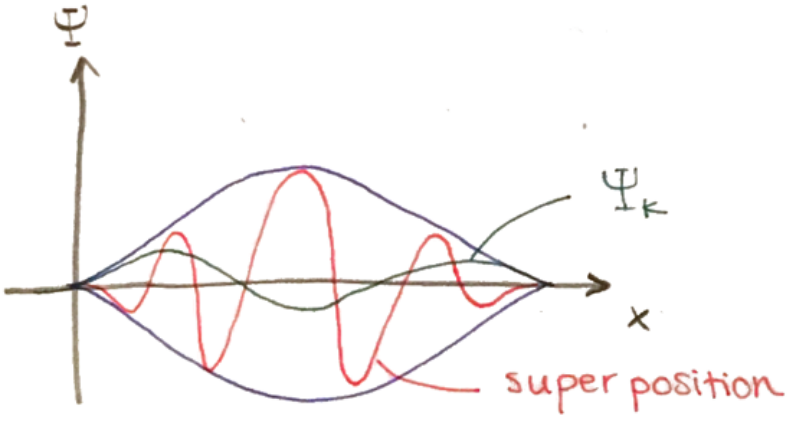
Fulla lösningen till SE:

$$\Psi_k(x,t) = \psi_k(x)e^{-E_k t/\hbar} = Ae^{ik(x-\frac{\hbar k}{2m}t)}$$

normalisera $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_k(x,t)|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \longrightarrow \infty$

(går ej att normalisera på ett bra sätt)

$\Psi_k(x,t)$: planvåg med given energi $\Rightarrow$ sep. av Ψ_k för många k $\Rightarrow$ begr. lösning.



Skapa vågpaket!

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k) e^{ik(x - \frac{\hbar k}{2m} t)} dk$$

sätt $t=0$

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k) e^{ikx} dk$$

$$\Rightarrow \Phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,0) e^{-ikx} dx$$ (som fourieranalys)

Skriv den som

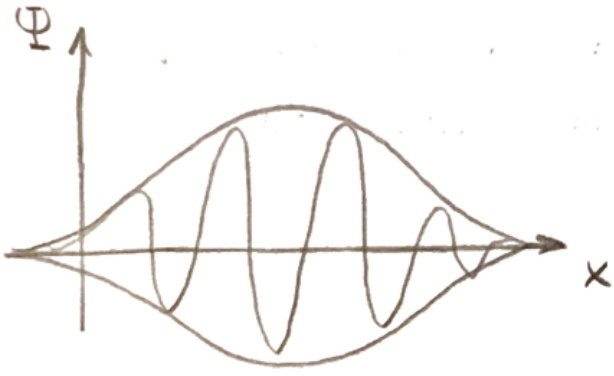
$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$$

$\omega(k)$ - kallas för dispersionsrelation: relationen en given frekvens (energi) till ett vågtal (våglängd)

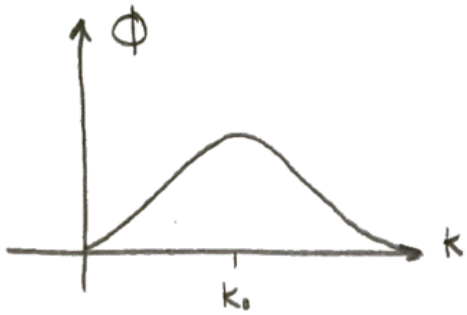
$\Rightarrow$ fashastighet: $v_{fas} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m}$

de Broglie: $p = \hbar k \Rightarrow v_{fas} = \frac{p}{2m}$

(MEN, klassiskt $v = p/m$)



v_{fas} säger inget om hur vågpaketet dvs. våp partikel rör sig.
$\Phi(k)$ bestämmer hur vågpaketet är format.



Antag att Φ centrerad kring k_0. Inte allt för stor bredd.

Expandera $\omega(k)$ kring k_0:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} (k-k_0) + \dots$$

← övriga termer överflödiga

$$= \omega_0 + \omega_0'(k-k_0)$$

Låt nu $k \equiv s + k_0 \Rightarrow$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_0+s)\, e^{i((k_0+s)x - (\omega_0 + \omega_0' s)t)}\, ds$$

$$\Psi(x,t) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}}_{\text{bärvågen}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_0+s)\, e^{is(x-\omega_0' t)}\, ds}_{\text{envelop}}$$

Bärvågen rör sig m. hastighet: $v_{fas} = \frac{\omega_0}{k_0}$

Envelopen rör sig m. hastighet: $v_{grupp} = \omega_0' = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}$

I vårt fall: $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = \frac{2\hbar k}{2m} = \frac{\hbar k}{m}$

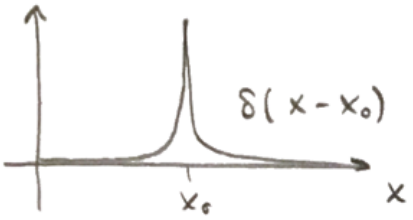
de Broglie $\Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = \frac{p}{m}$

Deltafunktionspotential

Diracs deltafunktion $\delta(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$$ (egentligen en distribution)



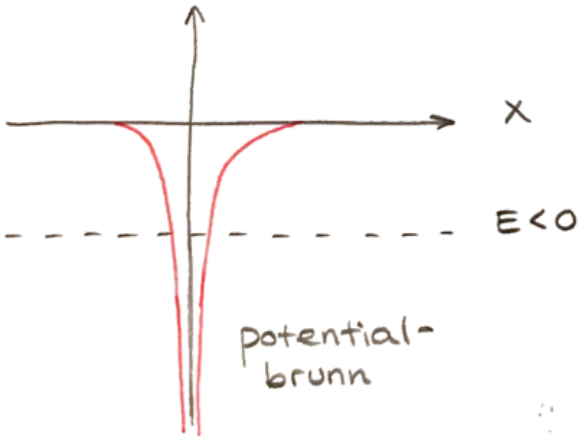
Vi skall titta på kvanttillstånd i potentialen $V(x) = -\alpha\,\delta(x)$

konstant

Stationära SE: $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \alpha\,\delta(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

Regionen $x \neq 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$



$E<0 \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = \kappa\psi$

där $\kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$

$\psi(x) = Ae^{-\kappa x} + Be^{\kappa x}$

$x<0: \quad \psi(x) = Be^{\kappa x}$

$x>0: \quad \psi(x) = Ae^{-\kappa x}$

$\psi(x),\ (x \neq 0) \propto e^{-\kappa|x|}$

$\psi(x)$ kontinuerlig i $x=0$

$\Rightarrow A = B$

$\psi(x) = Be^{-\kappa|x|}$

Vad händer med $\Psi(x)$ kring $x=0$?

Integrera SE över $[-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varepsilon \ll 1$

$$-\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2}\, dx - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \alpha\, \delta(x)\, \Psi(x)\, dx = E \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Psi(x)\, dx$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d\Psi}{dx}\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} - \alpha\, \Psi(0) = E \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Psi(x)\, dx$$

Låt $\varepsilon \longrightarrow 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d\Psi}{dx}\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\, \Psi(0)$$

men, $$\frac{d\Psi}{dx} = \begin{cases} \kappa B e^{\kappa x}, & x \leq 0 \\ -\kappa B e^{-\kappa x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-B\kappa e^{-\kappa\varepsilon} - B\kappa e^{-\kappa\varepsilon}\right) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\, \Psi(0)$$

$$-2B\kappa = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\, \Psi(0) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\, B \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \quad E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

B fås genom normalisering:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{0} |B|^2 e^{2\kappa x}\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} |B|^2 e^{-2\kappa x}\, dx = \frac{|B|^2}{\kappa}$$

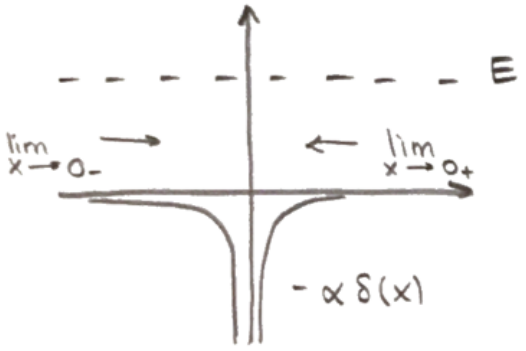
$$\Rightarrow B = \sqrt{\kappa} = \sqrt{\frac{m\alpha}{\hbar^2}}$$

$$\Rightarrow \psi(x) = \sqrt{\frac{m\alpha}{\hbar^2}}\, e^{-m\alpha|x|/\hbar^2}$$

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

Bundet tillstånd: $E<0$

Spridningstillstånd: $E>0$



$x \neq 0$: $\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k\psi^2$, $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$x<0$: $\psi(x) = A_- e^{ikx} + B_- e^{-ikx}$

$x>0$: $\psi(x) = A_+ e^{ikx} + B_+ e^{-ikx}$

Kontinuitet i $x=0$:

$$\lim_{x\to 0_-} \psi(x) = \lim_{x\to 0_+} \psi(x)$$

$$\Rightarrow A_+ + B_+ = A_- + B_-$$

Integrera vår stationära SE över $[-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varepsilon \ll 1$.

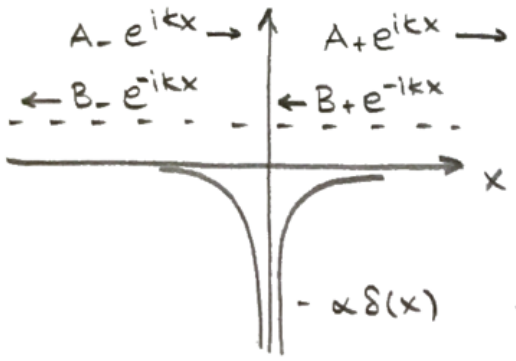
$$\frac{d\psi}{dx} = ikA_\pm e^{ikx} - ikB_\pm e^{-ikx}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d\psi}{dx}\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\right) = -\alpha\psi(0)$$

$$\Rightarrow ik(A_+ - B_+ - A_- + B_+) = -\frac{2m\alpha}{\hbar}(A_- + B_-)$$

$$\Rightarrow A_+ - B_+ = A_-(1+2i\beta) - B_-(1-2i\beta), \quad \beta = \frac{m\alpha}{\hbar^2 k}$$

$\psi(x)$ ej normaliserbar!



Ses som planvåg som rör sig åt olika håll.

$B_+ = 0$

$$B_- = \frac{i\beta}{1-i\beta} A_-$$ - Reflekterad amplitud

$$A_+ = \frac{1}{1-i\beta} A_-$$ - Transmiterad amplitud

Reflektionskoeff. :

$$R = \frac{|B_-|^2}{|A_-|^2} = \frac{\beta^2}{1+\beta^2} \xrightarrow[\text{då } \beta \to \infty]{} 1$$ (totalreflektion)

Transmitionskoeff :

$$T = \frac{|A_+|^2}{|A_-|^2} = \frac{1}{1+\beta^2} \Rightarrow R + T = 1$$

Kan ses som sannolikhet.

Eftersom $\beta = \frac{m\alpha}{\hbar^2 k} = \frac{m\alpha}{\hbar\sqrt{2mE}}$