10/9-18 Föreläsning 3

Ett annat sätt att se kvantfysiken på:

postulat 1:

För varje väldefinierad observabel A så finns en operator $\hat{A}$. (ex. $p \rightarrow \hat{p}$)

postulat 2:

Mätningen av observabeln A som ger mätvärdet a lämnar systemet i ett tillstånd φ_a, där φ_a är egenfunktionen till $\hat{A}$ med egenvärde a

postulat 3:

Tillståndet hos ett system kan representeras av en vågfunktion Ψ, som innehåller <u>all</u> info om systemet.

postulat 4:

Tillståndet hos ett system följer tidsutvecklingen som ges av $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$

Hamiltonoperator (energi)

ex.: $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$, kan finnas mycket mer komplicerade $\hat{H}$.

Väntevärdet $\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f|\Psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* f \Psi dx$

Ψ beskriver tillståndet hos ett system, $|\Psi|^2 dx$ är sannolikheten att systemet befinner sig i $[x, x+dx]$

Ett möjligt mått på avvikelsen vi kan förvänta oss från väntevärdet

$$\langle \Delta f \rangle = \langle f - \langle f \rangle \rangle =$$

$$= \underbrace{\int f |\psi|^2 dx}_{= \langle f \rangle} - \langle f \rangle \underbrace{\int |\psi|^2 dx}_{=1} = 0 \text{, blir inte bra!}$$

$$\langle \Delta f \rangle^2 = (f - \langle f \rangle)^2 = f^2 + \langle f \rangle^2 - 2f\langle f \rangle$$

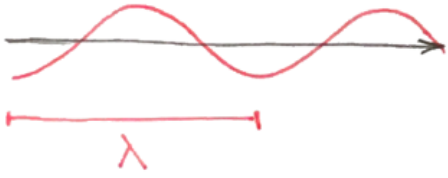
vill finna denna bredden, variationen

$$\langle (\Delta f)^2 \rangle = \langle f^2 + \langle f \rangle^2 - 2f\langle f \rangle \rangle = \int (f^2 + \langle f \rangle^2 - 2f\langle f \rangle) |\psi|^2 dx$$

$$= \langle f^2 \rangle + \langle f \rangle^2 - 2\langle f \rangle \underbrace{\int f |\psi|^2 dx}_{\langle f \rangle} = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2$$

Standardavvikelsen $\delta = \sqrt{\underbrace{\langle (\Delta f)^2 \rangle}_{\text{variansen}}}$

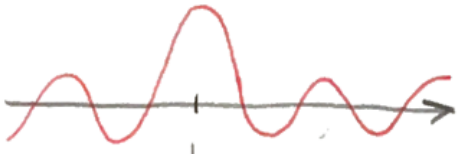
En första titt på osäkerhetsrelationen



Våg 1

väldefinierad våglängd!

obestämd position, ty någon rör sig hela tiden



Våg 2

här är vår våg, till skillnad från våg 1 som är överallt

Obestämd våglängd
välbestämd position

Inverst samband mellan position och våglängd?
Enligt deBroglie: $p = \frac{h}{\lambda}$

sambandet ser därför ut som: $\delta_x \delta_p \geq \frac{\hbar}{2}$

$\delta_x = \sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle}$, $\delta_p = \sqrt{\langle(\Delta p)^2\rangle}$

brukar skrivas: $\boxed{\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}$ Heisenbergs osäkerhetsrelation

"Det går inte att bestämma verkligheten mer än sådär." Om ex en våg har en bestämd hastighet c $\Rightarrow$ Δp är välbestämd $\Rightarrow$ positionen Δx aldrig kan bestämmas helt.

Fri partikel:

$E = \frac{p^2}{2m}$

differentialen $\Delta E = \frac{2p\Delta p}{2m} = \frac{p\Delta p}{m} = v\Delta p$

en osäkerhet i energin $\longrightarrow$ en osäkerhet i rörelsemängden.

Men $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v}$

Heisenberg $\Rightarrow \Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} \Rightarrow \Delta t \geq \frac{\hbar}{2\Delta p v} \geq \frac{\hbar}{2\Delta E}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}}$$

vi har en osäkerhet i energin under ett visst tidsintervall Δt.

Vi kan låna en mängd energi, E, under en viss tid. så länge det lämnas tbx. under tid, t.

Para $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ med $E = mc^2$ vi skulle nu alltså kunna låna materia, m. Alltså materia skulle kunna skapas från lånad energi $\Rightarrow$ "antimateria".

Den tidsoberoende SE.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi = \underbrace{\frac{\hat{p}^2 \Psi}{2m} + V\Psi}_{\text{"energin" } \Psi}$$

kinetisk

potentiell

Låt $\Psi = \psi(x) e^{-iEt/\hbar}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} e^{-iEt/\hbar}$$

, sätt in i SE $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx} + V(x)\psi(x)}$$

Stationära SE (tidsoberoende) betyder dock ej att Ψ är tidsoberoende

1. $|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi = \psi^*(x) e^{iEt/\hbar} \psi(x) e^{-iEt/\hbar} = \psi^* \psi = |\psi|^2$

stationära lösningar har tidsoberoende sannolikheter. Våntevärden är också tids-oberoende.

Observabel $F(x,p) \Rightarrow \langle F \rangle = \int \Psi^* F \Psi \, dx$

$$\langle F \rangle = \int \Psi^*(x) F\left(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi(x) \, dx$$

tidsoberoende $\Rightarrow \frac{d\langle x \rangle}{dt} = 0 \Rightarrow \langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = 0$

2. Energin $\langle H \rangle = \int \Psi^* \hat{H} \Psi \, dx \underset{\text{stat SE}}{=} \int \Psi^* E \Psi \, dx =$

$$= E \underbrace{\int |\Psi(x)|^2 dx}_{=1} = E$$

Väntevärdet kontra standardavvikelse?

$$\hat{H}^2 \Psi = \hat{H}(\hat{H}\Psi) = \hat{H}\underbrace{(E\Psi)}_{\text{stat SE}} = E(\hat{H}\Psi) = E^2 \Psi$$

$\Rightarrow \langle H^2 \rangle = E^2$

$\Rightarrow \delta_H = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2} = \sqrt{E^2 - E^2} = 0$, finns ingen standardavvikelse för energin.

3. Lösningen till tidsoberoende SE kan skrivas

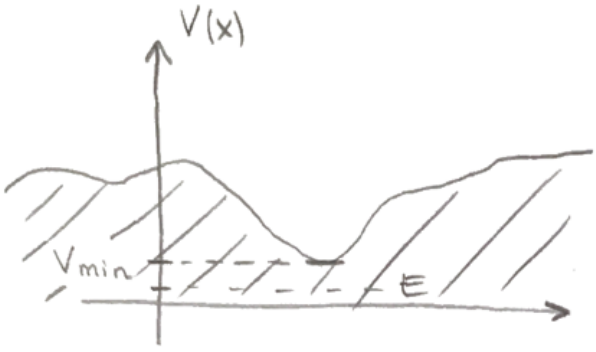
$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$$

$\psi_n(x)$ är lösning till stationära SE och med energin E_n.

Uppg. 2.2 Stationära SE:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar}\left(V(x) - E\right)\psi(x)$$

$V(x) > V_{min}$



Antag att $E < V_{min}$ (motsatsen)

$\Rightarrow V(x) - E > 0 \quad \forall\ x$

$\Rightarrow \dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} > 0$

$\Rightarrow \dfrac{d\psi}{dx}$ är en strikt växande funktion

$\Rightarrow \psi$ ej begränsad, vi kan inte normalisera ψ längre

$\Rightarrow E > V_{min} \quad \forall\ x$ för att vi ska få fysikaliska lösningar

Uppg. 2.1 Hur vet vi att E är reell?
(fysikalisk)

$\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar}$

Antag $E = E_0 + i\pi$, E_0, π reella

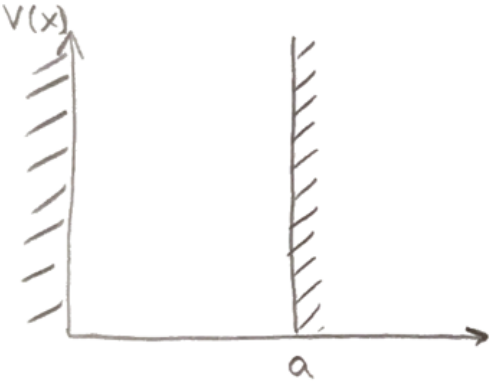
$\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-itE_0/\hbar} \cdot e^{\pi t/\hbar}$

$|\Psi(x,t)|^2 = |\psi(x)|^2 e^{2\pi t/\hbar}$

krav att $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 e^{2\pi t/\hbar} dx$

ej begränsad!

Oändlig potentialbrunn



$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le a \\ \infty & -\infty < x < 0,\ 0 < x < \infty \end{cases}$$

Sannolikheten att hitta partikeln utanför $[0,a]$ är noll $\Rightarrow$ $\psi(x) = 0$ för x utanför $[0,a]$.

Innanför potentialväggarna $\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$, $V(x) = 0$

$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0$ där

$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar}}$

Lösningar på formen $\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$

$\psi(x)$ ska vara 0 på $x = a$, $x = 0$

$\psi(0) = B = 0 \Rightarrow \psi(x) = A\sin(kx)$

$\Psi(a) = A\sin(ka) = 0$ ($A=0$ trivial lösning, ej intressant)

$\Rightarrow \sin(ka) = 0$

$\Rightarrow ka = n\pi, \quad n = 1, 2, 3$

$k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3$ ← randvillkoren har gjort att vi har fått kvantiserade tillstånd

$\Rightarrow E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ ← kvantiserad energi