R_2: $x=0$, $0<y<2$, $\boxed{F(0,y) = 0, \quad 0<y<2}$

R_3: $y=2$, $0<x<4$, $F(x,2) = 6x-2x^2-4x = \underbrace{2x-2x^2}_{g(x)}$

$g'(x) = 2-4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ $\quad g\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}, 2\right)}$

R_4: $x=4$ $\quad 0<y<2$, $f(4,y) = 12y-16y-4y^2 = \underbrace{-4y-4y^2}_{h(y)}$

$h'(y) = -4-8y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$ ← ligger ej i det studerade intervallet & är därför ej intressant.

Ändpunkterna på R_1, R_2, R_3, R_4 (dvs hörnen på Ω) är också intressanta.

$\boxed{f(0,0) = 0}$, $\boxed{f(0,2) = 0}$, $\boxed{f(4,0) = 0}$, $\boxed{f(4,2) = -24}$

Svar: största värdet är 1 & antas i $(1,1)$

Minsta värdet är -24 & antas i $(4,2)$

② Om $H = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ så är:

$$\det(H(a,b) - tI) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2) = t^2 - (\lambda_1+\lambda_2)t + \lambda_1\lambda_2$$

$$\begin{vmatrix} A-t & B \\ B & C-t \end{vmatrix} = (A-t)(C-t) - B^2 = t^2 - (A+C)t + AC - B^2$$

så: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = A + C \\ \lambda_1 \lambda_2 = AC - B^2 \end{cases}$ varpå det följer att:

(a) $\iff \begin{cases} A > 0 \\ AC - B^2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f_{11}(a,b) > 0 \\ \det H(a,b) > 0 \end{cases}$

(b) $\iff \begin{cases} A < 0 \\ AC - B^2 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f_{11}(a,b) < 0 \\ \det H(a,b) > 0 \end{cases}$

(c) $\iff AC - B^2 < 0 \iff \det H(a,b) < 0$

<u>Obs!</u> Om $\det H(a,b) = 0$ så kan vi inte dra någon slutsats av detta.

<u>Ex1</u> $f(x,y) = 60 - 2y^2 - 4xy - x^4$

(Ex 3 från mån) $\begin{cases} f_1(x,y) = 4y - 4x^3 = 0 \\ f_2(x,y) = 4y - 4x = 0 \end{cases} \iff \dots \iff (x,y) = (1,-1), (-1,1)$ eller $(0,0)$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} -12x^2 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$ indefinit ty $\det H(0,0) < 0$

$H(1,-1) = \begin{bmatrix} -12 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$ negativ definit ty $\det H(1,-1) > 0$ & $f_{11}(1,-1) < 0$

$H(-1,1) = \begin{bmatrix} -12 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$ —— " ——

$\therefore$ $(0,0)$ sadelpunkt

$(-1,1)$ & $(1,-1)$ lokalt maxima

Matteföreläsning 3.3.2. Thomas 31/1-18 Ons

Om (a,b) stationärpunkt till f så är:

$$f(x,y) = f(a,b) + \underbrace{\frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} x-a & y-b \end{bmatrix}}_{\mathbb{h}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} f_{11}(a,b) & f_{12}(a,b) \\ f_{21}(a,b) & f_{22}(a,b) \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}(a,b)} \underbrace{\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}}_{\mathbb{h}}}_{Q(x,y)} + \text{rest}$$

f har:

a) Lokalt minimum i (a,b) om $Q(x,y) > 0$ för alla $(x,y) \neq (a,b)$
(Q o $\mathcal{H}$ är positivt definita)

b) Lokalt maximum i (a,b) om $Q(x,y) < 0$ för alla $(x,y) \neq (a,b)$
(Q o $\mathcal{H}$ är negativt definita)

c) Sadelpunkt i (a,b) om $Q(x,y)$ antar både positiva o negativa för $(x,y) \neq (a,b)$
(Q o $\mathcal{H}$ indefinita)

1

Notera att $\mathcal{H}(a,b)$ är symmetrisk så det existerar en ortogonalmatris P s.a.
$\mathcal{H}(a,b) = PDP^T$ där D är en diagonalmatris innehållande egenvärdena till $\mathcal{H}(a,b)$ så

$$Q(x,y) = \frac{1}{2} \mathbb{h}^T \mathcal{H} \mathbb{h} = \frac{1}{2} \mathbb{h}^T \underbrace{PDP^T}_{\mathcal{H}} \mathbb{h} = \frac{1}{2} (P\mathbb{h})^T \mathbb{h} = \frac{1}{2} \underbrace{(P^T\mathbb{h})^T}_{\mathbb{k}^T} D \underbrace{(P^T\mathbb{h})}_{\mathbb{k}} =$$

$$= \frac{1}{2} \mathbb{k}^T D \mathbb{k} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 k_1^2 + \lambda_2 k_2^2$$

(a) $\Leftrightarrow$ Egenvärdena till $\mathcal{H}(a,b)$ är positiva

(b) $\Leftrightarrow$ —— " —— negativa

(c) $\Leftrightarrow$ $\mathcal{H}(a,b)$ har både positivt o negativt egenvärde

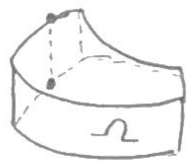
Obs! Om något egenvärde är $=0$ så måste vi undersöka högre ordningens termer i Taylorutv. av $f(x,y)$ kring (a,b)

$\boxed{\text{sats}}$ Eventuella lokala & globala extremvärden (dvs max eller min) till en funktion $f(\mathbf{x})$ på ett område Ω antas i:

I) Stationära punkter i Ω

II) singulära punkter i Ω

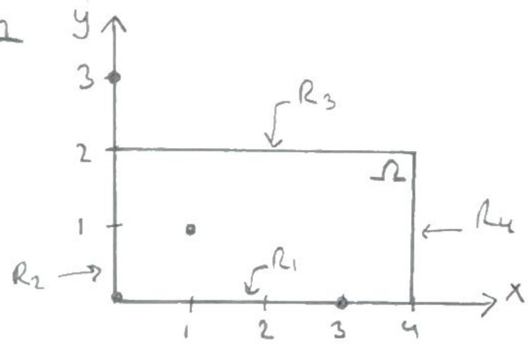
III) Randen $\partial\Omega$ av området Ω



Avs 13.2 Typisk godkändnivå, men med längre lösning

uppg. Bestäm det största resp. minsta värdet av $f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2$ på området Ω: $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 2$

Lösn



(I) (stationära punkter i det inre av Ω)

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 3y - 2xy - y^2 = 0 \\ f_2(x,y) = 3x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(3-2x-y) = 0 \\ x(3-x-2y) = 0 \end{cases}$$

Ekvationssystemet har lösningarna: $(0,0)$, $(0,3)$, $(3,0)$, $(1,1)$

Endast $(1,1)$ ligger i det inre av Ω & $\boxed{f(1,1) = 1}$

lösn. på:

$$\begin{cases} 3 - 2x - y = 0 \\ 3 - x - 2y = 0 \end{cases}$$

(II) $f(x,y)$ har inga singulära punkter

(III) (Randen)

R_1: $y = 0$, $0 < x < 4$, $\boxed{f(x,0) = 0 \ , \quad 0 < x < 4}$