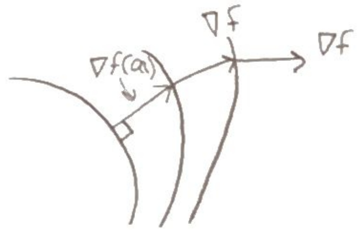
Matteföreläsning 3.3.1. Thomas 29/1-18 Mån

__Riktningsderivata__

$$D_v f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h v) - f(a)}{h} = \nabla f(a) \cdot v$$

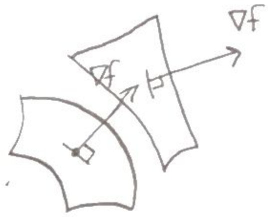
__Nivåkurva__

$f(x,y) = c$



__Nivåyta__

$f(x,y,z) = c$



__Avsn. 12.9__

Maclaurins formel för funktioner $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \frac{F^{(3)}(0)}{3!}t^3 + \ldots$$

∘ speciellt för $t = 1$ får vi att:

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \frac{F^{(3)}(0)}{3!} + \ldots \quad (*)$$

__Antag att $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$__

Om vi tillämpar $(*)$ på $F(t) = f(a+th, b+tk)$ så får vi:

$$\underbrace{f(a+h, b+k)}_{F(1)} = \underbrace{f(a,b)}_{F(0)} + \underbrace{f_1(a,b)h + f_2(a,b)k}_{F'(0)} + \frac{1}{2}\underbrace{\Big(f_{11}(a,b)h^2 + 2f_{12}(a,b)hk +}_{F''(0)}$$
$$\underbrace{+ f_{22}(a,b)k^2\Big)}_{F''(0)}$$

__Byter beteckningar:__ $\begin{cases} x = a+h \\ y = b+k \end{cases}$ Med dessa kan formeln skrivas:

$$f(x,y) = \boxed{\underbrace{f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)}_{L(x,y)} + \frac{1}{2}\Big(f_{11}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{12}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{22}(a,b)(y-b)^2\Big)} + \ldots$$

↑ $P_2(x,y)$, Taylorpolynomet t.o.m. ordning 2 kring (a,b)

så f har varken lokalt max eller min i den stationära punkten $(0,0)$

Antag att (a,b) är en stationär punkt till en funktion $f(x,y)$. I en omgivning av (a,b) är:

$$f(x,y) = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) +$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\left(f_{11}(a,b)(x-a)^2 + 2 f_{12}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{22}(a,b)(y-b)^2 \right)}_{Q(x,y)} + \text{rest}$$

resten är liten i förhållande till $Q(x,y)$ nära (a,b)

Huruvida (a,b) är ett maximin eller ingetdera (sadelpunkt) avgörs av tecknet på $Q(x,y)$

$$Q(x,y) = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} x-a & y-b \end{bmatrix}}_{h^T} \underbrace{\begin{bmatrix} f_{11}(a,b) & f_{12}(a,b) \\ f_{21}(a,b) & f_{22}(a,b) \end{bmatrix}}_{\substack{\mathcal{H}(a,b) \\ \text{Hessianen av } f \text{ i } (a,b)}} \underbrace{\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}}_{h} = \frac{1}{2} h^T \mathcal{H} h$$

a) (a,b) är lokalt minimum om $Q(x,y) > 0$ för alla $(x,y) \neq (a,b)$

b) (a,b) är lokalt maximum om $Q(x,y) < 0$ för alla $(x,y) \neq (a,b)$

c) (a,b) är sadelpunkt om $Q(x,y)$ antar både positiva o negativa värden för $(x,y) \neq (a,b)$

a) $Q(x,y)$ o $\mathcal{H}(a,b)$ sägs i detta fallet vara positivt definit

b) $Q(x,y)$ o $\mathcal{H}(a,b)$ sägs —— " —— negativt definit

c) $Q(x,y)$ o $\mathcal{H}(a,b)$ sägs —— " —— indefinit

Ex 1 $f(x,y) = \arctan(x+2y)$, $(a,b) = (3,-1)$

$$f_1 = \frac{1}{1+(x+2y)^2}, \quad f_2 = \frac{2}{1+(x+2y)^2}$$

$$f_{11} = \frac{-2(x+2y)}{(1+(x+2y)^2)^2}, \quad f_{12} = \frac{-4(x+2y)}{(1+(x+2y)^2)^2}, \quad f_{22} = \frac{-8(x+2y)}{(1+(x+2y)^2)^2}$$

$$P_2(x,y) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-3) + (y+1) + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}(x-3)^2 + 2(-1)(x-3)(y+1) - 2(y+1)^2\right)$$

Ex 2 $f(x,y) = e^{x^2+2y}$, $(a,b) = (0,0)$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots$$

$$e^{x^2+2y} = 1 + (x^2+2y) + \frac{(x^2+2y)^2}{2} + \frac{(x^2+2y)^3}{3} + \ldots = \underbrace{1 + x^2 + 2y + 2y^2}_{P_2(x,y),\ \text{maclaurinpolynom av ordning } 2} + \text{rest}$$

Avs 13.1

Om $f(x,y)$ är diff. bar & antar ett lokalt max i en punkt (a,b) så måste vi ha:

$f_1(a,b) = 0$, $f_2(a,b) = 0$

$\boxed{\text{Def}}$ En punkt a där $\nabla f(a) = 0$ kallas för en <u>stationär punkt</u> (eller <u>kritisk</u>) till f. Om $\nabla f(a)$ inte existerar så säger vi att a är en <u>singulär punkt</u>.

Ex 3 $f(x,y) = 60 - 2y^2 - 4xy - x^4$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} f_1(x,y) = -4y - 4x^3 = 0 \\ f_2(x,y) = -4y - 4x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - x = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

Systemet har tre lösningar:

$(x,y) = (0,0), (1,-1), (-1,1)$

Vilket också är de stationära punkterna.

$f(x,0) = 60 - x^4 < 60$ för $x \neq 0$ nära $x = 0$

$f(x,-x) = 60 - 2x^2 + 4x^2 - x^4 = 60 + 2x^2 - x^4 > 60$ då $x \neq 0$, nära $x = 0$