Sats Om f är dif.bar i $\mathbb{a}$ så är $D_{\mathbb{v}} f(\mathbb{a}) = \nabla f(\mathbb{a}) \underset{\text{skalärprodukt}}{\bullet} \mathbb{v}$

Bevis $g'(t) = \frac{d}{dt}(f(\mathbb{a}+t\mathbb{v})) = \frac{d}{dt}(f(a_1+tv_1, a_2+tv_2, \dots, a_n+tv_n)) =$

$= [\text{kedjeregeln}] = f_1(\mathbb{a}+t\mathbb{v}) \cdot v_1 + f_2(\mathbb{a}+t\mathbb{v}) \cdot \mathbb{v}_2 + \dots + f_n(\mathbb{a}+t\mathbb{v}) \cdot v_n =$

$= \nabla f(\mathbb{a}+t\mathbb{v}) \bullet \mathbb{v}$

så: $D_{\mathbb{v}} f(\mathbb{a}) = g'(0) = \nabla f(\mathbb{a}) \bullet \mathbb{v}$ ■

Ex 4 $f(x,y) = 4 - \sin x \cos y$, $\mathbb{a} = (-\pi/4, -\pi/4)$

$f_1(x,y) = -\cos x \cos y$, $f_1(-\pi/4, -\pi/4) = -\frac{1}{2}$

$f_2(x,y) = \sin x \sin y$, $f_2(-\pi/4, -\pi/4) = \frac{1}{2}$

$\nabla f(\mathbb{a}) = (-1/2, 1/2)$

$\mathbb{v}_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ OBS! Viktigt att vektorn har längden 1

$D_{\mathbb{v}_1} f(\mathbb{a}) = (-1/2, 1/2) \bullet (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) = \frac{3}{2\sqrt{5}} \approx 0{,}67$

$\mathbb{v}_2 = \mathbb{j}$, $D_{\mathbb{v}_2} f(\mathbb{a}) = (-1/2, 1/2) \bullet (0,1) = 1/2 = 0{,}5$

$\mathbb{v}_3 = \frac{\nabla f(\mathbb{a})}{\|\nabla f(\mathbb{a})\|}$, $D_{\mathbb{v}_3} f(\mathbb{a}) = \nabla f(\mathbb{a}) \bullet \frac{\nabla f(\mathbb{a})}{\|\nabla f(\mathbb{a})\|} = \|\nabla f(\mathbb{a})\| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}71$

Sats Gradienten $\nabla f(\mathbb{a})$ pekar i den riktning utifrån $\mathbb{a}$ i vilket funktionsvärdena $f(\mathbb{x})$ växer snabbast (dvs $D_{\mathbb{v}} f(\mathbb{a})$ är som störst) & i den riktningen är $D_{\mathbb{v}} f(\mathbb{a}) = \|\nabla f(\mathbb{a})\|$

Bevis $D_{\mathbb{v}} f(\mathbb{a}) = \nabla f(\mathbb{a}) \bullet \mathbb{v} = \|\nabla f(\mathbb{a})\| \, \|\mathbb{v}\| \cos \theta = \|\nabla f(\mathbb{a})\| \cos \theta$

vinkeln mellan $\nabla f(\mathbb{a})$ & $\mathbb{v}$

Vi ser att $D_{\mathbb{v}} f(\mathbb{a})$ är som störst då $\theta = 0$, dvs då $\mathbb{v}$ pekar i gradientens riktning, dvs $\mathbb{v} = \frac{\nabla f(\mathbb{a})}{\|\nabla f(\mathbb{a})\|}$ ■

Matteföreläsning 3.2.3 Thomas 24/1-18 Ons

Avs 12.7

$\boxed{\text{Def}}$ Med gradienten av $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i punkten a menas vektorn:

$$\operatorname{grad} f(a) = (f_1(a), \dots, f_n(a)) \quad (= f_1(a)e_1 + \dots + f_n(a)e_n)$$

standardbaser i $\mathbb{R}^n$

Anm Om vi inför differentialoperatorn: $\nabla = e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + e_n \frac{\partial}{\partial x_n}$:

kan gradienten skrivas $\nabla f(a)$

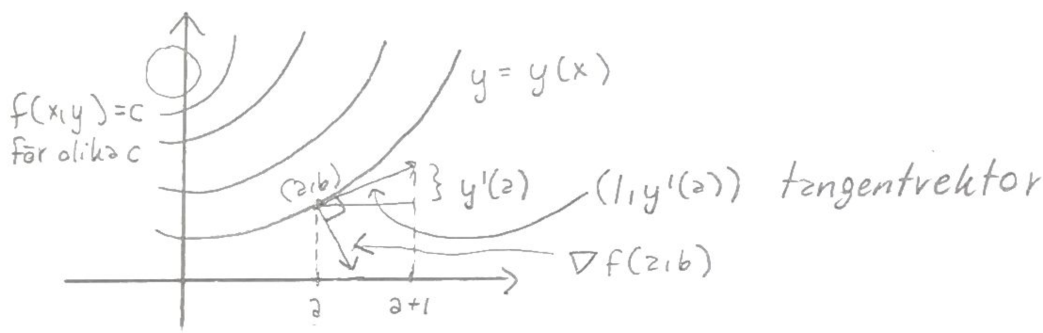
Nablaoperatorn (deloperatorn)

Ex 1 $f(x,y) = x(y+1)^2$

$\nabla f(x,y) = ((y+1)^2, 2x(y+1))$

$\nabla f(1,2) = (9, 6)$

Man kan visa att om $f(x,y)$ är differentierbar i en punkt (a,b) så kan nivåkurvan till f genom (a,b) lokalt betraktas som en funktionskurva $y = y(x)$ (eller $x = x(y)$) för deriverbar funktion $y(x)$ (eller $x(y)$)



Nära $x = a$ gäller då att: $f(x, y(x)) = f(a,b)$

Deriverar vi båda led med avseende på x ger kedjeregeln att:

$f_1(x, y(x)) \cdot 1 + f_2(x, y(x))\, y'(x) = 0$

Speciellt följer att (med $x = a$) $f_1(a,b) \cdot 1 + f_2(a,b)\, y'(a) = 0$

$(f_1(a,b), f_2(a,b)) \bullet (1, y'(a)) = 0$

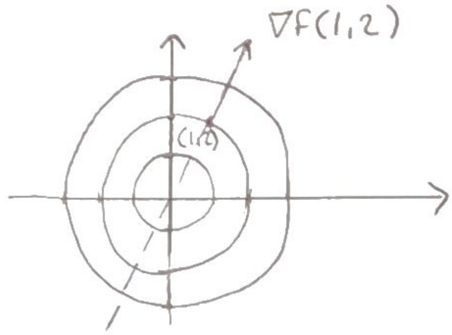
$\nabla f(a,b) \bullet (1, y'(a)) = 0$

Sats Om f är differentierbar i (a,b) & $\nabla f(a,b) \neq 0$ så är $\nabla f(a,b)$ vinkelrät mot nivåkurvan till f i (a,b)

__Ex 2__ $f(x,y) = x^2 + y^2$

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$

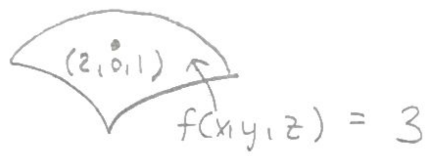
$\nabla f(1,2) = (2,4)$



Normallinjen till f:s nivåkurva genom $(1,2)$ är därför $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4}$

__Anm__ På liknande vis kan man visa att $\nabla f(a,b,c)$ är vinkelrät mot nivåytan till $f(x,y,z)$ i (a,b,c)

__Ex 3__ $f(x,y,z) = xy + z^2 + x$



$\nabla f(x,y,z) = (y+1, x, 2z)$

$\nabla f(2,0,1) = (1, 2, 2)$

$\Rightarrow$ Gradienten vinkelrät mot nivåkurvor, nivåytor

Def Med riktningsderivatan av $f(\mathbb{x})$ i punkten $\mathbb{a}$ m.a.p. riktningen $\mathbb{v}$ där $\|\mathbb{v}\| = 1$, menas:

$$D_{\mathbb{v}} f(\mathbb{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbb{a} + h\mathbb{v}) - f(\mathbb{a})}{h}$$

__OBS!__ $D_{e_j} f(\mathbb{a}) = f_j(\mathbb{a}) \quad \left(= \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbb{a}) \right)$

__OBS!__ Om vi sätter $g(t) = f(\mathbb{a} + t\mathbb{v})$ så är $D_{\mathbb{v}} f(\mathbb{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h}$

$= g'(0)$