Ibland stöter vi även på sammansättningar $\mathbb{f}(g(x))$, där $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o. $\mathbb{f}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. $(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{g} (y_1, \dots, y_m) \xrightarrow{\mathbb{f}} (z_1, \dots, z_k)$

Kedjeregeln ger då att:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \frac{\partial z_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_j}, \quad \text{för } i = 1, \dots, k, \; j = 1, \dots, n$$

Detta kan också skrivas på matrisform:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{k \times n\text{-matris}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial y_m} \end{bmatrix}}_{k \times m\text{-matris}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{m \times n\text{-matris}}$$

dvs $D(\mathbb{f} \circ g)(x) = D\mathbb{f}(g(x)) \cdot Dg(x)$

<u>Ex 4</u> $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{då } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Vi har tidigare sett att $\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ saknar gränsvärde i $(0,0)$, så f är ej kontinuerlig, men:

$$f_1(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_2(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

så f är partiellt deriverbar. Att vara partiellt deriverbar är därför ingen lämplig flerdimensionell motsvarighet till begreppet deriverbarhet för funktioner av en variabel.

Def Vi säger att $f(x,y)$ är differentierbar i (a,b) om f är partiellt deriverbar i (a,b) o $^{(*)}\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - hf_1(a,b) - kf_2(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

I vissa sammanhang behöver man också studera vektorvärda funktioner av flera variabler.

$$\underbrace{(x_1,\dots,x_n)}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \xrightarrow{\mathbf{f}} \underbrace{(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})\in\mathbb{R}^m}$$

Om vi linjäliserar varje **komponent** f_i i $\mathbf{f}$ i $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)$ så får vi

$$L_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{a}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{a})(x_1-a_1)+\dots+\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\mathbf{a})(x_n-a_n) \qquad i=1,\dots,m$$

vilket också kan skrivas på matrisform:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}(\mathbf{x})} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{a}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{a})} + \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}}_{D\mathbf{f}(\mathbf{a})} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1-a_1 \\ \vdots \\ x_n-a_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}-\mathbf{a}}}_{d\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{a})}$$

Linjäriseringen av $\mathbf{f}$ i $\mathbf{a}$ Jacobimatrisen

kan jämföras med: $f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$

__Ex 3__ $g(r,s,t)=(r^2s,\ r^2t,\ s^2-t^2)$, $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$

$$Dg(r,s,t)=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2sr & r^2 & 0 \\ 2rt & 0 & r^2 \\ 0 & 2s & -2t \end{bmatrix} \\ \quad r \qquad s \qquad t \end{array}$$

$$g(0{,}99,\ 3.02,\ 2.97) \approx g(1,3,3) + Dg(1,3,3)\begin{bmatrix} -0{,}01 \\ 0{,}02 \\ -0{,}03 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0{,}01 \\ 0{,}02 \\ -0{,}03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}96 \\ 2{,}91 \\ 0{,}3 \end{bmatrix}$$

Matteföreläsning 3.2.2 Thomas 24/1-18 Ons

Avs 12.6

Tangentplanet $z = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$ avviker inte så mycket från funktionsytan $z = f(x,y)$ då (x,y) ligger nära (a,b) så:

$$\boxed{f(x,y) \approx f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)} = L(x,y) \quad (*)$$

→ Linjaliseringen av $f(x,y)$ i (a,b)

Ex 1 $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$, $f(3{,}01, 2{,}98) = ?$

Vi kan beräkna en approximation mha linjaliseringen i $(3,3) = (a,b)$

$$f_1(x,y) = \frac{-y/x^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad f_1(3,3) = -\frac{1}{6}$$

$$f_2(x,y) = \frac{1/x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad f_2(3,3) = \frac{1}{6}$$

$$f(3,3) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$f(3{,}01, 2{,}98) \approx L(3{,}01, 2{,}98) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}(3{,}01-3) + \frac{1}{6}(2{,}98-3) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{200}$$

Om vi i $(*)$ ersätter $\begin{cases} a \text{ mot } x \\ b \text{ mot } y \\ x \text{ mot } x+dx \\ y \text{ mot } y+dy \end{cases}$ så får vi:

$$f(x+dx, y+dy) - f(x,y) \approx \underbrace{f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy}_{\text{differentialen } df,\ df(x,y,dx,dy)}$$

Ibland uttrycks approximationer (som i ex ovan) med differentialer.

Ex 2 $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$, $df = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$

$$f(3{,}01, 2{,}98) \approx f(3,3) + df(3,3,0.01,-0{,}02) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}0{,}01 + \frac{1}{6}(-0{,}02) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{200}$$

Sats Om $f(x,y)$ är differentierbar i (a,b) så är $f(x,y)$ också kontinuerlig i (a,b)

Bevis För att gränsvärdet (*) skall existera måste $f(a+h,b+k) \to f(a,b)$ då $(h,k) \to (0,0)$ ∎

Sats Om de partiella derivatorna $f_1(x,y)$ o $f_2(x,y)$ är kontinuerliga i en omgivning av (a,b) så är $f(x,y)$ differentierbar i (a,b)

Illustration av regularitetsbegrepp