Ex 4 $f(x,y,z) = \sin(3x)\cos(4y)\sin(5t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -25\sin(3x)\cos(4y)\sin(5t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (-9-16)\sin(3x)\cos(4y)\sin(5t)$$

så f är en lösning på vågekvationen

Avsn. 12.5

Sedan tidigare känner vi till kedjeregeln för derivatan av sammansättningar

$$f(x(t)):\ \underbrace{\mathbb{R} \xrightarrow{x} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}}_{f\circ x}$$

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = f'(x(t))\,x'(t)$$

Motsvarigheten för sammansättningar av typen $f(g(t))$: $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ g(t) = (x(t), y(t)) \end{pmatrix}$ är:

$$\frac{d}{dt}\big(f(x(t), y(t))\big) = f_1(x(t), y(t))\,x'(t) + f_2(x(t), y(t))\,y'(t)$$

eller kortare: $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

Ex 5 $f(x,y) = e^x y + x \qquad x(t) = t^2+1 \qquad y(t) = \sin t$

$$f(x(t), y(t)) = e^{t^2+1}\cdot \sin t + t^2 + 1$$

$$\frac{d}{dt}\big(f(x(t)), y(t)\big) = 2te^{t^2+1}\sin t + e^{t^2+1}\cos t + 2t$$

Alternativt får vi med kedjeregeln i flera variabler att

$$\frac{df}{dt} = (e^x y + 1)2t + e^x\cos t = (e^{t^2+1}\sin t + 1)2t + e^{t^2+1}\cos t$$

Ex 6 $$\frac{\partial}{\partial u}\left(f\left(u^2v, \frac{u}{v}\right)\right) = f_1\left(u^2v, \frac{u}{v}\right)\cdot 2uv + f_2\left(u^2v, \frac{u}{v}\right)\frac{1}{v}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(f\left(u^2v, \frac{u}{v}\right)\right) = f_1\left(u^2v, \frac{u}{v}\right)\cdot u^2 + f_2\left(u^2v, \frac{u}{v}\right)\left(-\frac{u}{v^2}\right)$$

Avsn. 12.4

De partiella derivatorna är funktioner i sig & kan i sin tur deriveras partiellt.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ji}$$, Om $i=j$ skriver vi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

Ex 3 $f(x,y) = e^{xy} + x^2 y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} + x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} + 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + 2x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + 2x$$

→ Dessa är lika!

$\boxed{\text{Sats}}$ Om alla de partiella derivatorna t.o.m. ordning 2 är kontinuerliga så är $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Anmärkning: Motsvarande sats gäller för derivator av ordning 3 & högre. T.ex för en funktion av fyra variabler är bla $f_{124} = f_{142} = f_{214} = f_{412} = f_{421}$

Några viktiga partiella differentialekvationer (PDE)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ (Laplace ekv, en lösning sägs vara harmonisk)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ (Värmeledningsekvationen/diffusionsekv)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ (Vågekvationen)

Matteföreläsning 3.2.1. Thomas 22/1-17 Mån

Avs. 12.3

$\boxed{\mathbf{n} = (f_1(a,b), f_2(a,b), -1)}$ är en normalvektor till funktionsytan (1)

$z = f(x,y)$, där $(x,y) = (a,b)$

$\boxed{z = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)}$ en ekvation för tangentplanet (2)

$\boxed{\dfrac{x-a}{f_1(a,b)} = \dfrac{y-b}{f_2(a,b)} = \dfrac{z-f(a,b)}{-1}}$ En ekvation för normallinjen genom $(a, b, f(a,b))$ (3)

$\Rightarrow$ Parameterfri form

Ex 1 $f(x,y) = x^2y + 2y^2$ $(a,b) = (1,2)$

$f_1(x,y) = 2xy$ $f_2(x,y) = x^2 + 4y$

$f_1(1,2) = 4$ $f_2(1,2) = 9$ $f(1,2) = 10$

(1) $\mathbf{n} = (4, 9, -1)$ är en normalvektor till ytan $z = f(x,y)$ i $(1,2,10)$

(2) $z = 10 + 4(x-1) + 9(y-2) \Leftrightarrow z = 4x + 9y - 12$

En ekvation för tangentplanet

(3) $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{9} = \dfrac{z-10}{-1}$ Ekv för normallinjen genom $(1,2,10)$

Partiella derivator för funktioner av tre eller fler variabler definieras analogt som för två variabler.

Ex 2 $f(x,y,z) = y\sin(xz) + ze^y + x$

$f_1(x,y,z) = y\cos(xz) + 1$

$f_2(x,y,z) = \sin(xz) + ze^y$

$f_3(x,y,z) = xy\cos(xz) + e^y$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(f\left(u^2v, \frac{u}{v}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(f_1\left(u^2v, \frac{u}{v}\right)2uv + f_2\left(u^2v, \frac{u}{v}\right)\frac{1}{v}\right) =$$

$$= \left(f_{11}\left(u^2v, \frac{u}{v}\right)2uv + f_{12}\left(u^2v, \frac{u}{v}\right)\frac{1}{v}\right)2uv + f_1\left(u^2v, \frac{u}{v}\right)2v +$$

$$+ \left(f_{21}\left(u^2v, \frac{u}{v}\right)2uv + f_{22}\left(u^2v, \frac{u}{v}\right)\frac{1}{v}\right)\cdot\frac{1}{v}$$