$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{703}{1700}$$

Betingade sannolikhet & oberoende

Vad är sannolikheten för $P(A \cap B)$? T.ex. sannolikhet för regn både på lördag (A) och söndag (B)?

Vi borde ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

sannolikhet för givet att A inträffar

<u>Def</u>: $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, $P(A) > 0$.

<u>Def</u>: A och B sägs vara <u>oberoende</u> om $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ <u>Obs</u>.: Om $P(A) > 0$ är detta ekv. med $P(B|A) = P(B)$.

<u>Ex.</u>: Slå 2 tärningar (blå & gul, B & Y).

$A = \{$blå tärning visar $6\}$

$B = \{$gul ——— " ———$\}$

$C = \{$summan av de 2 utfallen blir $7\}$

Rimlig modell: 36 utfall lika sannolika.

$P(A \cap B) = \underline{P(\{6,6\})} = \frac{1}{36} = P(\{6\})\, P(\{6\}) = P(A) \cdot P(B)$

$P(C) = \frac{1}{6}$

$P(A \cap C) = \frac{1}{36}$

Men $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$

Proposition: Om A och B är oberoende, är också A och B^c oberoende.

Bevis:
$$P(A \cap B^c) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) - P(A)P(B) \text{ då } A \& B \text{ oberoende}$$
$$= P(A) \cdot P(B^c) \quad \blacksquare$$

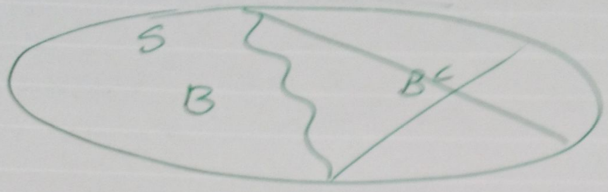
Prop.: Fixera en mängd B och skriv $Q(A) = P(A|B)$, $A \in P(S)$, dvs alla händelser A.

Då är Q ett sannolikhetsmått.

Bevis:
$$Q(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \in [0,1]$$
$$Q(S) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$
$$Q\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \frac{P\left(B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} \overbrace{(B \cap A_n)}^{\text{disjunkta}}\right)}{P(B)}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} Q(A_n) \quad \blacksquare$$

Ex.: $P(A_1 \setminus A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) - P(A_1 \cap A_2 \mid B)$

$P(A^c \mid B) = 1 - P(A \mid B)$



Betingning på B innebär att "skära bort" B^c från S utan att ändra förhållanden mellan sannolikheterna för delmängder av B.

Oberoende för fler än två händelser

Def.: $A_1, A_2, A_3, \dots$ är oberoende om det för alla $i_1, i_2, \dots, i_n$ gäller att

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \dots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_n}).$$

Ex.: Kasta tärning ∞ många gånger.

Här antar vi oberoende resultat av tärningskasten. $S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ för alla $i\}$

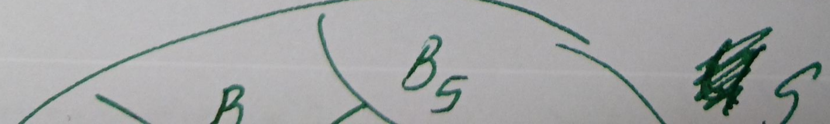
Låt $A_n = \{6 \text{ i kast } n\} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S : x_n = 6\}$

Då är $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ och A_n oberoende enligt antagandet. $\Rightarrow P\{A_n\} = \frac{1}{6}$

$$P(\text{1:a 6:a kommer i kast } n) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c \cap A_n)$$

$$= P(A_1^c) \cap P(A_2^c) \cap \ldots \cap P(A_{n-1}^c) \cap P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$$

$$P(\text{aldrig 6:a}) = P(A_1^c) \cap \ldots \cap P(A_n^c) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \overset{\text{kontinuitet hos sannolikhetmått}}{=} \lim_{N \to \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^N = 0$$



$= P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_n})$

Ex kasta en tärning ∞ många gånger

Här antar vi oberoende resultat av tärningskasten

$S = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in \{1, \dots, 6\}$ för alla $i\}$

Låt $A_n = \{$sexa i kast nummer $n\} = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in S : x_n = 6\}$

Då är $A_1, A_2 \dots$ oberoende enligt antagandet

P(första sexan kommer i kast n) $= P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_{n-1}^c \cap A_n)$

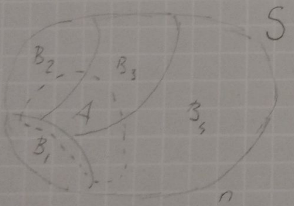
$= P(A_1^c) P(A_2^c) \dots P(A_{n-1}^c) P(A_n)$

$= \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$

kontinuetet hos sannolikhetsmått

P(aldrig någon sexa) $= P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots) \underline{=}$

$= \lim_{N \to \infty} P(A_1^c \cap \dots \cap A_N^c) = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^N = 0$



Totala sannolikhetslagen

Låt $B_1, B_2, \dots, B_n$ vara en partition av S (dvs disjunkta och $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = S$)

Då är $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A | B_i) \cdot P(B_i)$

Specialfall: $P(A) = P(A | B^c) P(B^c) + P(A | B) P(B)$

Ex 3% av befolkningen drabbas av lungcancer under sitt liv

För rökare är risken 10%

Andelen rökare är 20% av befolkningen

Vad är risken för en icke-rökare att drabbas?

Välj en person, NN, på måfå

Låt $A = \{$NN är rökare$\}$

$B = \{$NN får lungcancer$\}$

Vi söker $P(B | A^c)$

Enligt TSL

$$P(B) = P(B|A^c)P(A^c) + P(B|A)P(A)$$

$$\frac{P(B) - P(B|A)P(A)}{P(B|A^c)} = P(B|A^c)$$

$$\frac{0{,}03 - 0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}8} = \frac{1}{80} \approx 1{,}25\%$$

Vad är sannolikheten att en på måfå vald LC-patient är rökare

$$P(A|B) = ?$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}03} = \frac{2}{3} \approx 67\%$$

Bayes formel: $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

$$= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A^c)P(A^c) + P(B|A)P(A)}$$