Matteföreläsning 3.1.3. Thomas 19/1-17 Fre

<u>Fortsättning avsn. 12.2</u>

<u>uppg. (lätt)</u>

$$F(x,y) = \begin{cases} x^2 \cdot \ln\left(\frac{x}{y} + y\right) & , (x,y) \neq (3,1) \\ A & , (x,y) = (3,1) \end{cases}$$

Bestäm A så att f blir kontinuerlig funktion

<u>Lösning</u> $x^2 \cdot \ln\left(\frac{x}{y} + y\right) \to 9 \ln 4$ då $(x,y) \to (3,1)$

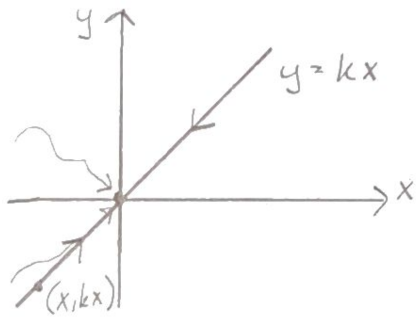
så f blir kontinuerlig om $A = 9 \ln 4$

<u>uppg. (svår)</u> Existerar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^4}$ b) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^4}$ c) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

d) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ e) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y}$

<u>Lösning</u> a)

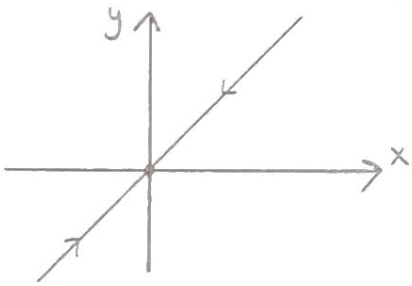


$$f(x,kx) = \frac{kx^2}{x^2+k^4x^4} = \frac{k}{1+k^4x^2} \underset{x\to 0}{\to} k$$

Olika k ger olika gränsvärden

$\therefore$ gränsvärde existerar inte

b)



$$f(x,kx) = \frac{kx^3}{x^2+k^4x^4} = \frac{kx}{1+k^4x^2} \underset{x\to 0}{\to} 0$$

Visa att gränsvärdet är noll:

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right| = \underbrace{\left|\frac{x^2}{x^2+y^4}\right|}_{\leq 1} |y| \leq |y|$$

$\to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Vi säger att f är partiellt deriverbar i (a,b) om båda dessa gränsvärden existerar. Räknetekniskt skall y uppfattas som en konstant när man deriverar med avseende på x & vice versa.

Ex 1 $f(x,y) = x^2y + 2y^2$

$f_1(x,y) = 2xy \qquad f_2(x,y) = x^2 + 4y$

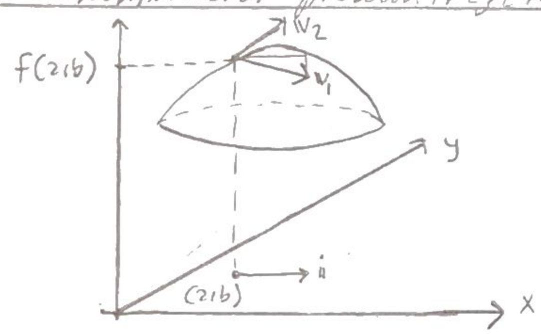
Ex 2 $f(x,y) = \sin(xy^2)$

$f_1(x,y) = \cos(xy^2)\cdot y^2 \qquad f_2(x,y) = \cos(xy^2)\cdot 2xy$

Ex 3 $f(x,y) = y\cdot g(x^2+y)$, där $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f_1(x,y) = y\cdot g'(x^2+y)\cdot 2x \qquad f_2(x,y) = g(x^2+y) + y\cdot g'(x^2+y)$

$\Rightarrow$ kombinerar produktregeln & kedjeregeln



$\mathbb{V}_1 = (1, 0, f_1(a,b))$

$\mathbb{V}_2 = (0, 1, f_2(a,b))$

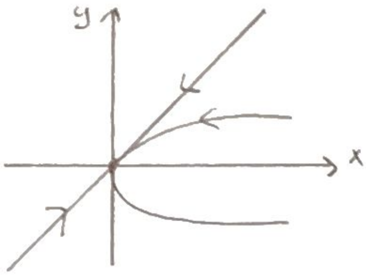
$\mathbb{V}_1$ & $\mathbb{V}_2$ är tangentvektorer till funktionsytan i x-led resp y-led & tsm spänner de upp ett tangentplan. med normalvektorn.

$$\mathbb{n} = \mathbb{V}_2 \times \mathbb{V}_1 = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ 0 & 1 & f_2(a,b) \\ 1 & 0 & f_1(a,b) \end{vmatrix} = (f_1(a,b), f_2(a,b), -1)$$

Eftersom tangentplanet går genom punkten $P_0 = (a,b,f(a,b))$ så består tangentplanet av alla punkter P för vilket $n \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0$

$\Longleftrightarrow f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$

$\Longleftrightarrow z = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$ Tangentplanets ekvation c)



$$f(x, kx) = \frac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4} = \frac{k^2x}{1+k^4x^2} \to 0 \text{ då } x \to 0$$

Men: $f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ då $y \to 0$

Gränsvärde existerar inte

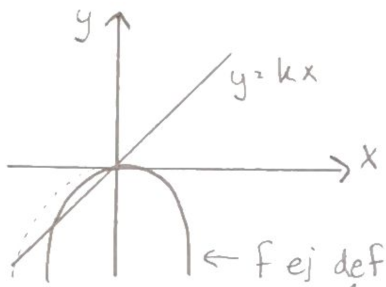
d) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ Kan undersökas på liknande sätt som i b men här kan man också med fördel använda polära koordinater

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{r\cos\theta\, r^2\sin^2\theta}{r^2} = |r|\underbrace{|\cos\theta\,\sin^2\theta|}_{\leq 1} \leq r \to 0 \text{ då } r \to 0$$

dvs $(x,y) \to (0,0)$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

e)



← f ej def då $y = -x^2$

$$f(x, kx) = \frac{k^2x^3}{x^2+kx} = \frac{k^2x^2}{\cancel{x}+k} \to 0 \text{ då } x \to 0$$

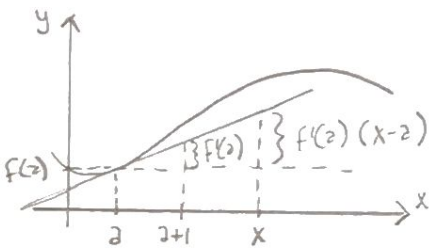
Men: $f(x, x^4-x^2) = \frac{x(x^4-x^2)}{x^2+(x^4-x^2)} = \frac{x^2-1}{x} \to \pm\infty$, $x \to 0$

∴ Gränsvärde existerar inte

x^6-x^2 om y^2 i täljaren

Avsn. 12.3

För reellvärda funktioner av en variabel $f(x)$ gäller:



Tangenten $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

För reellvärda funktioner av två variabler $f(x,y)$ kan vi tex mäta lutningen i x-led resp y-led genom de sk. partiella derivatorna.

$$f_1(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \qquad f_2(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

Alternativa skrivsätt: $f_1(a,b) = D_1 f(a,b) = f'_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$