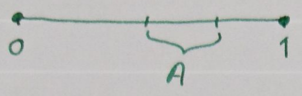
$P(B\setminus A) = P(B) - P(A\cap B) = 0.4 - 0.3 = 0.1$

$1 - P(A\setminus B) - P(B\setminus A) - P(A\cap B) = 1 - 0.2 - 0.1 - 0.3 = 0.4$
$= 40\%$

Ex.: Välj ett tal på måfå, $[0,1]$.



$P(A) = \text{längd}(A)$

Låt $A_n = [0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}]$. Vi har $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$

och $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0, \frac{1}{2}]$. Skriv då $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

Vi har $P(A_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \downarrow \frac{1}{2} = P(A)$

$A_n \downarrow A \Rightarrow P(A_n) \downarrow P(A)$

Kontinuitet hos sannolikhetsmått

Antag att $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ och skriv

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Då gäller att $P(A_n) \uparrow P(A)$.

Bevis:

$$A_0 = \emptyset \qquad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overbrace{(A_n \setminus A_{n-1})}^{\text{disjunkta}}$$

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \setminus A_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(P(A_n) - P(A_{n-1})\right)$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \left(P(A_N) - P(A_{n-1})\right) = \lim_{N \to \infty} P(A_N)$$

Antag att $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ och skriv $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Då gäller att $P(A_n) = P(A)$

Vi har att $A_1^c \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ och $A^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$

$\Rightarrow \lim_N P(A_N^c) = P(A^c)$ enl. ovan.

$\therefore \lim_N (1 - P(A_N)) = 1 - P(A)$

Uppräkneliga eller ändliga utfallsrum

$S = \{u_1, u_2, u_3, \ldots\}$ går att skriva alla element så här.

Om $P_1, P_2, \ldots$ är tal sådana att $P_n \geq 0$ för alla n
och $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1$ och låter $P(A) = \sum_{i : u_i \in A} P_i$,

så blir P ett sannolikhetsmått.

Ex.: Singla slant till första klave.

$S = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\quad p_n = \frac{1}{2^n}$ = ex. på sannolikhetsmått

Det klassiska sannolikhetsmåttet:

$S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $\quad p_i = \frac{1}{n}$ för alla i.

$$P(A) = \frac{\text{antalet utfall i } A}{\text{totala antalet utfall}}$$

Ex.: Slå en tärning 3 ggr. Sannolikheten för att få exakt en sexa?

Naturligt med klassiskt sannolikhetsmått.

$S = \{(x, y, z) : x, y, z = \{1, 2, \dots, 6\}\}$

$A = \{x, y, z\} \in S$: exakt en av x, y, z är $6\}$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{1\cdot5\cdot5 + 5\cdot1\cdot5 + 5\cdot5\cdot1}{6^3} = \frac{3\cdot5\cdot5}{6^3} = \frac{75}{216} = \frac{25}{72} \approx 0.34 = 34\%$$

Bollar i en skål:

Vi har n $\overbrace{\text{bollar,}}^{\text{i en skål}}$ och ska välja k av dem.

Antalet sätt att göra detta är:

Utan återläggning: Permutationer: M. hänsyn till ordning: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = (n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Kombinationer: Utan hänsyn till ordning: $\binom{n}{k}$ = binomialkoefficient

Obs: $(n)_k = \binom{n}{k} \cdot k! \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Med återläggning: Permutationer: Med hänsyn till ordning: $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ st}} = n^k$

Ex.: Födelsedagsproblemet

I en klass med n ($n \leq 365$) elever, vad är sannolikheten att alla har olika födelsedag?

$S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \{1, \ldots, 365\} \text{ för alla } i\}$

$A = \{\text{alla har olika födelsedag}\}$

$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (366-n)}{365^k}$ $(\approx 0.5 \text{ då } n = 23)$

Ex.: Välj 3 kort ur en kortlek. Vad är sannolikheten att ingen av dem är en spader?

$S = \{\text{alla kombinationer av 3 kort}\}$

$A = \{\text{alla kombinationer av icke-♠ kort}\}$

$$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{703}{1700}$$

Betingande sannolikhet & oberoende