Matteföreläsning 3.7.3. Thomas $^{28}/_{2}$-18 Ons

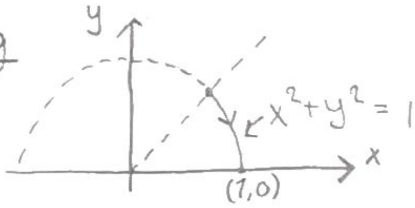
<u>forts. avs. 16.3</u>

Greens formel:

$$\oint_{\partial D} \underbrace{F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy}_{\substack{\mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} \\ (F_1,F_2)\cdot(dx,dy)}} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy$$

<u>uppgift</u> Beräkna $\int_C y^3\,dx - x^3\,dy$ då C är cirkelbågen $x^2+y^2=1$, $0 \le y \le x$ orienterad från $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ till $(1,0)$

<u>Läsning</u>



$$\mathbb{r} = \cos t\,\mathbb{i} + \sin t\,\mathbb{j}, \quad \pi/4 \xrightarrow{t} 0$$

$$I = \int_C y^3\,dx - x^3\,dy = \int_{\pi/4}^{0} \underbrace{\sin^3 t}_{y^3}\,\underbrace{(-\sin t)\,dt}_{dx} - \underbrace{\cos^3 t}_{x^3}\,\underbrace{\cos t\,dt}_{dy} =$$

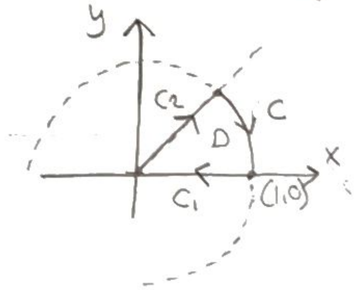
$$= \int_0^{\pi/4} \sin^4 t + \cos^4 t = \int_0^{\pi/4} \left(\Big(\underbrace{\frac{1-\cos 2t}{2}}_{\sin^2 t}\Big)^2 + \Big(\underbrace{\frac{1+\cos 2t}{2}}_{\cos^2 t}\Big)^2 \right) dt =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2t = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\frac{1+\cos 4t}{2}}_{\cos^2 t}\Big)\right) dt = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4t\right) dt =$$

$$= \frac{3\pi}{16} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\pi/4} = \frac{3\pi}{16}$$

<u>Tips!</u> Öva på trigonometriska formler

Alternativ lösning (med Greens formel)



$$\int_C \cdots + \underbrace{\int_{C_1} \cdots}_{\substack{0 \\ \text{ty } y=0 \\ \text{på } C_1}} + \underbrace{\int_{C_2} \cdots}_{\substack{0 \\ \text{ty } y=x \\ \text{på } C_2}} = -\iint_D \cdots$$

Greens formel funkar bara moturs → därmed byter vi tecken här då den är medurs

$$= -\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(-x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(y^3) \right) dx\,dy = 3\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = [\text{Polär substitution}] =$$

$$= 3\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^1 r^2 \cdot r \, dr \right) d\theta = \frac{3\pi}{4} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{16}$$

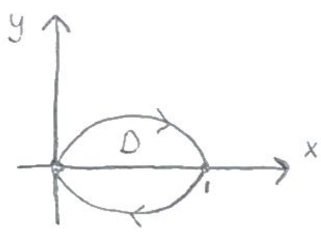
Anm Om C omsluter ett område D så ger Greens formel speciellt att:

$$\boxed{\begin{aligned} &\oint_C x\,dy = \iint_D dx\,dy = \text{Arean av } D \\ &\oint_C -y\,dx = \iint_D dx\,dy = \text{Arean av } D \\ &\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \text{Arean av } D \end{aligned}}$$

Uppgift Bestäm arean av det område som begränsas av kurvan

$$\mathbf{r} = t^2\,\mathbf{i} + t(1-t^2)\,\mathbf{j} \qquad -1 \le t \le 1$$

Lösning $x = t^2$, $y = t(1-t^2)$ $\longrightarrow$ $y = \pm\sqrt{x}\,(1-x)$



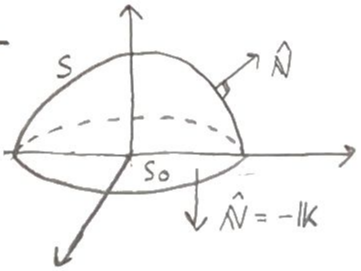
$$\text{Arean av } D = \int_{-C} -y\,dx = \int_C y\,dx =$$

samma kurva men motsatt riktning

$$= \int_{-1}^{1} \underbrace{t(1-t^2)}_{y}\, \underbrace{2t\,dt}_{dx} = 2\int_{-1}^{1} (t^2 - t^4)\,dt = 4\int_0^1 (t^2-t^4)\,dt = 4\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{8}{15}$$

<u>uppgift</u> Bestäm flödet av fältet $\mathbb{F} = xz\,\mathbb{i} + yz\,\mathbb{j} + \mathbb{k}$ upp genom halvsfären $x^2+y^2+z^2=1,\ z \geq 0$

<u>Lösning</u>



Flödet genom halvsfären:

$$\iint_S \mathbb{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iint_{S+S_0} \mathbb{F}\cdot\underbrace{\hat{N}\,dS}_{-\mathbb{k}\,dxdy} - \iint_{S_0} \mathbb{F}\cdot\hat{N}\,dS$$

$\mathbb{k}$ på S_0 ty $z=0$ där

$$= \iiint_K \underbrace{\operatorname{div}\mathbb{F}}_{2z}\,dV + \underbrace{\iint_{S_0} dS}_{\pi \text{ ty } S_0 \text{ cirkelskiva med radie } 1} = \iiint_K 2z\,dV + \pi = \begin{bmatrix} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{bmatrix}$$

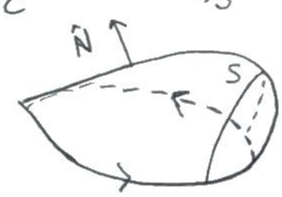
$$= 2\int_0^1\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi} \underbrace{\rho\cos\phi}_{z}\,\rho^2\sin\phi\,d\theta\right)d\phi\right)d\rho + \pi = 4\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_0^{\pi/2} + \pi$$

$$= \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$$

<u>Stokes sats</u>

Låt S vara en styckvis glatt yta som är orienterad med normalvektor $\hat{N}$ o vars "kant" C består av en eller flera styckvis glatta o slutna kurvor med positiv orientering m.a.p ytans orientering. Om $\mathbb{F} = F_1\,\mathbb{i} + F_2\,\mathbb{j} + F_3\,\mathbb{k}$ är ett glatt vektorfält i ett område som omfattar S så är:

$$\int_C \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \iint_S \operatorname{curl}\mathbb{F}\cdot\hat{N}\,dS$$



Tänk att du är normalen som är ute o går. Då skall du ha grafen bakom dig när du promenerar i kurvans riktning

Avs. 16.4

Sats Gauss's divergenssats

Låt D vara ett reguljärt område i rummet vars rand ∂D består av en eller flera styckvis glatta ytor som är orienterade med utåtriktad normalvektor $\hat{N}(x,y,z)$.

Om $\mathbb{F} = F_1 \mathbb{i} + F_2 \mathbb{j} + F_3 \mathbb{k}$ är ett glatt vektorfält på D så är:

$$\iint_{\partial D} \mathbb{F} \bullet \hat{N} \, dS = \iiint_D \operatorname{div} \mathbb{F} \, dV$$

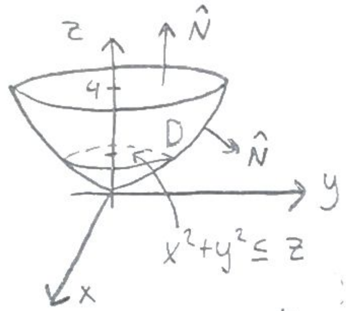
Normalen måste peka ut från området

Skall flöda in lika mycket som det flödar ut ($\iint$) ($\iiint$)

---

uppgift Bestäm flödet av fältet $\mathbb{F} = xz\mathbb{i} + yz\mathbb{j} + z\mathbb{k}$ ut ur området $x^2+y^2 \leq z \leq 4$ (Parabdoid som uppåt begränsas av 4)

Lösning



Totala flödet ut:

$$\iint_{\partial D} \mathbb{F} \bullet \hat{N} \, dS = \iiint_D \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(z)\right)}_{\operatorname{div} \mathbb{F}} dV$$

$$= \iiint_D (2z+1)\, dV = \int_0^4 \left(\iint_{x^2+y^2\leq z} (2z+1)\, dxdy \right) dz = \int_0^4 (2z+1) \left(\underbrace{\iint_{x^2+y^2 \leq z} dx\, dy}_{\pi \sqrt{z}^2 = \pi z} \right) dz$$

$$= \int_0^4 (2z+1)\pi z \, dz = \ldots = \frac{152\pi}{3}$$