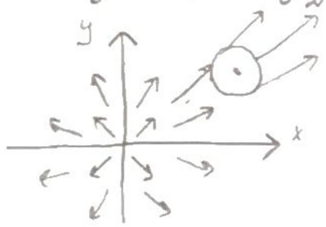
Mattaföreläsning 3.7.2. Thomas 28/2-18 Ons

Avs 16.2

Def Ett vektorfält $\mathbb{F}$ sägs vara <u>källfritt</u> i ett område D om $\operatorname{div}\mathbb{F} = 0$, för alla punkter i D. Vektorfältet sägs vara <u>virvelfritt</u> i D om $\operatorname{curl}\mathbb{F} = \mathbb{0}$, för alla punkter i D.

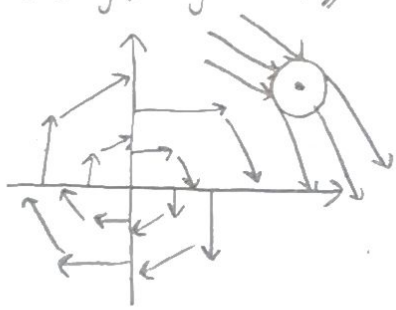
Ex 1 $\mathbb{F}(x,y) = x\mathbb{i} + y\mathbb{j}$ Pilarna utåt blir allt större $\Rightarrow$ positivt vektorfält



$$\operatorname{div}\mathbb{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) = 2$$

$$\operatorname{Curl}\mathbb{F} = \Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(y)}_{0} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(x)}_{0}\Big)\mathbb{k} = 0 \Rightarrow \mathbb{F} \text{ virvelfritt}$$

Ex 2 $F(x,y) = y\mathbb{i} - x\mathbb{j}$



$$\operatorname{div}\mathbb{F} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(y)}_{0} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(-x)}_{0} = 0 \Rightarrow \mathbb{F} \text{ källfritt}$$

$$\operatorname{Curl}\mathbb{F} = \Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(-x)}_{-1} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(y)}_{-1}\Big)\mathbb{k} = -2\mathbb{k}$$

Sats 3 (g) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{F}) = 0$ $(\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbb{F})) = 0$

"Divergensen är rotationen av $\mathbb{F}$"

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbb{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbb{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbb{k}$
Nablaoperatorn

(h) $\nabla \cdot \nabla \phi = 0$

"konservativa vektorfält är virvelfria"

(g) $= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{F}) = 0$
(h) $= \nabla \cdot \nabla \phi = 0$
(i) $= \nabla \times (\nabla \times \mathbb{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbb{F}) - \nabla \cdot \nabla \mathbb{F}$

(i) $\nabla \times (\nabla \times \mathbb{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbb{F}) - \underbrace{\nabla \cdot \nabla}\mathbb{F}$

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplace operation

Bevis Av (g)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = ye^{xy} + z & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = xe^{xy} + 1/y & (2) \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = x + 1/z & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \phi = e^{xy} + zx + g(y,z)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = xe^{xy} + g_1(y,z) \quad (4)$$

viktigt med abs till ln om vi ej tydliggör att det handlar om ett tal > 0

$$(2) + (4) \Rightarrow g_1(y,z) = \frac{1}{y} \overset{y>0}{\Rightarrow} g(y,z) = \ln y + h(z)$$

$$\phi = e^{xy} + xz + \ln y + h(z) \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} = x + h'(z) \overset{(3)}{\Rightarrow} h'(z) = 1/z$$

$$h(z) = \ln z + C$$

Svar: $\phi = e^{xy} + xz + \ln y + \ln z + C$

Avs 16.3

$\boxed{\text{Sats}}$ Låt D vara ett reguljärt & slutet område i planet vars rand ∂D består av en eller flera styckvis glatta kurvor som är positivt orienterade m.a.p. D. Om $\mathbb{F} = F_1 \mathbb{i} + F_2 \mathbb{j}$ är ett glatt vektorfält på D så är:

$$\oint_{\partial D} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Anm Positivt orienterad map D betyder att området D ligger på vänster sida då man går längs kurvan.

Anm Reguljärt betyder att D kan delas upp i ändligt många delområden som är både x-enkla & y-enkla.

Anm Av (h) följer att varje konservativt vektorfält ($\mathbb{F} = \nabla\phi$) är vinkelfritt

$\boxed{\text{Sats 4}}$ Om $\mathbb{F}$ är ett glatt virvelfritt vektorfält på ett enkelt sammanhängande område D så är $\mathbb{F}$ konservativt.

Anm Att vara glatt innebär att motsvarande funktioner skall vara tillräckligt reguljära. I denna kurs kan vi tänka på detta som oändligt deriverbart.

Anm Ett område sägs vara enkelt sammanhängande om varje enkel sluten kurva i D kan "dras ihop kontinuerligt" till en punkt i D.

I planet:

Ej enkelt sammanhängande

I rummet:

(Avokado)
Enkelt sammanhängande

Anm Ex 5 i avs. 15.2 (s. 871) ger exempel på ett virvelfritt vektorfält som inte är konservativt.

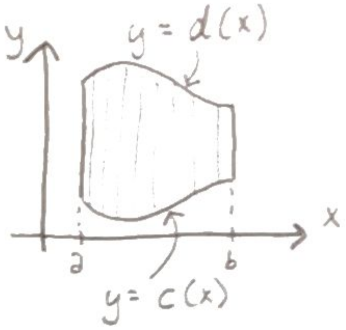
Ex 3 $\mathbb{F} = (ye^{xy} + z)\mathbb{i} + (xe^{xy} + 1/y)\mathbb{j} + (x + 1/z)\mathbb{k}$

D: $y > 0$, $z > 0$

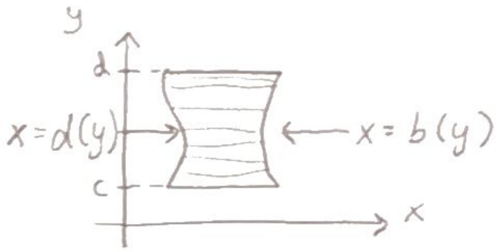
$$(\nabla \times \mathbb{F} =) \text{ Curl } \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^{xy}+z & xe^{xy}+1/y & x+1/z \end{vmatrix} = (0-0)\mathbb{i} + (1-1)\mathbb{j} + (e^{xy} + xye^{xy} - e^{xy} + xye^{xy})\mathbb{k} = \mathbb{0}$$

Så $\mathbb{F}$ är virvelfritt på D e därmed även konservativt på D, ty D är enkelt sammanhängande.

Dvs det finns en reellvärd funktion ϕ s.a. $\mathbb{F} = \nabla\phi$ $\longrightarrow$

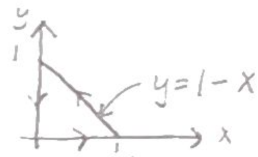


y - enkelt



x - enkelt

Ex 4 $\quad I = \oint_C x\,dx + 3xy\,dy$



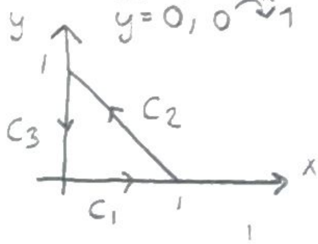
① Greens formel:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x) \right) dx\,dy = \iint_D 3y\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 3y\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{3y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \frac{3}{2} \int_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{3}{2} \left[-\frac{(1-x)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

② Alternativt kan vi beräkna I per def av kurvintegral

$$I = \underbrace{\int_{C_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}}_{y=0,\ 0 \curvearrowright 1} + \underbrace{\int_{C_2} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}}_{y=1-x,\ 1 \curvearrowright 0} + \underbrace{\int_{C_3} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}}_{x=0,\ 1 \curvearrowright 0} = \int_0^1 x\,dx + \int_1^0 x\,dx + \overbrace{3x(1-x)(-1)\,dx}^{3xy\,dy} + 0$$



$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 (4x + 3x^2)\,dx = \ldots = \frac{1}{2}$$