Matteföreläsning 3.7.1. Thomas 26/2-18 Mån

<u>Forts avs. 15.6</u>

Flödet av vektorfältet $\mathbb{F}$ genom en yta S kan beräknas med:

$$\iint_S \mathbb{F} \bullet \hat{\mathbb{N}}\, dS = \pm \iint_D \mathbb{F} \bullet \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v}\right) du\,dv}_{\hat{\mathbb{N}}\, dS \,=\, d\mathbf{S}}$$

<u>uppgift</u> Bestäm flödet av fältet $\mathbb{F} = 2x\,\mathbb{i} + y\,\mathbb{j} + z\,\mathbb{k}$ uppåt genom ytan

$S: \mathbb{r} = u^2 v\,\mathbb{i} + uv^2\,\mathbb{j} + v^3\,\mathbb{k} \quad 0<u<1,\ 0<v<1$

<u>lösning</u> $\dfrac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ 2uv & v^2 & 0 \\ u^2 & 2uv & 3v^2 \end{vmatrix} = 3v^4 - 6uv^3 + \underbrace{4u^2v^2 - u^2v^2}_{3u^2v^2 \,>\, 0}$

Kolla på z-komponenten för att se om vektorn pekar upp eller ner

$\Rightarrow z > 0 \quad \Rightarrow$ vektorn pekar uppåt

Hade $z<0$ hade vi fått lägga till ett minustecken framför integralen.

På S är: $\mathbb{F} = 2u^2v\,\mathbb{i} + uv^2\,\mathbb{j} + v^3\,\mathbb{k}$

Flödet upp genom $S = \iint_S \mathbb{F} \bullet \hat{\mathbb{N}}\, dS = \iint_D (6u^2v^5 - 6u^2v^5 + 3u^2v^5)\,du\,dv$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 3u^2v^5\, du \right) dv = 1/6$$

<u>uppgift</u> Bestäm flödet av fältet $\mathbb{F} = xz\,\mathbb{i} + yz\,\mathbb{j} + z\,\mathbb{k}$ ut ur området

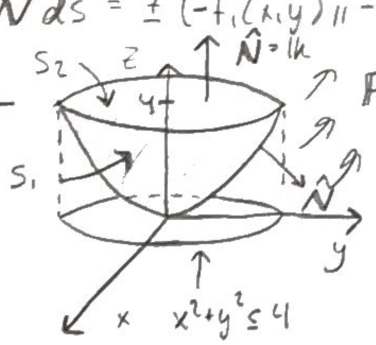
$x^2 + y^2 \le z \le 4$

<u>Anm</u> För en funktionsyta $S: \mathbb{r} = x\,\mathbb{i} + y\,\mathbb{j} + f(x,y)\,\mathbb{k}$ har vi tidigare sett:

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial y} = -f_1(x,y)\,\mathbb{i} - f_2(x,y)\,\mathbb{j} + \mathbb{k}$$

$$\hat{\mathbb{N}}\, dS = \pm\left(-f_1(x,y)\,\mathbb{i} - f_2(x,y)\,\mathbb{j} + \mathbb{k}\right) dx\,dy$$

<u>Lösning</u>



$S_1: \ z = x^2 + y^2, \ (x,y) \in D \quad (z = f(x,y))$

$\hat{\mathbb{N}}\, dS = (\pm)(2x\,\mathbb{i} + 2y\,\mathbb{j} - \mathbb{k})\,dx\,dy$

Plus per efterfrågad riktning ($\hat{\mathbb{N}}$ lutar snett nedåt)

På S_1 är $\mathbb{F} = x(x^2+y^2)\,\mathbb{i} + y(x^2+y^2) + (x^2+y^2)\,\mathbb{k}$

OBS! Alltid viktigt att kunna skilja på vektor & tal.

Ex 1 $\mathbb{F} = \overbrace{xz}^{F_1}\,\mathbb{i} + \overbrace{(x^2y+z)}^{F_2}\,\mathbb{j} - \overbrace{xy^2z^2}^{F_3}\,\mathbb{k}$

$$\operatorname{div}\mathbb{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y+z) + \frac{\partial}{\partial z}(-xy^2z^2) = z + x^2 - 2xy^2z \quad \text{(ger ett tal)}$$

$$\operatorname{curl}\mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & x^2y+z & -xy^2z^2 \end{vmatrix} = (-2xyz^2 - 1)\,\mathbb{i} - (-y^2z^2 - x)\,\mathbb{j} + (2xy)\,\mathbb{k}$$

$\rightarrow$ En vektor

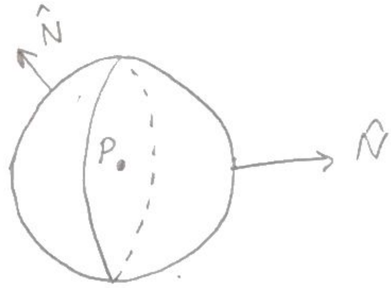
För ett plant vektorfält $\mathbb{F} = F_1\mathbb{i} + F_2\mathbb{j}$ är:

$$\operatorname{div}\mathbb{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \quad \& \quad \operatorname{curl}\mathbb{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbb{k}$$

Vi skall senare se att:

$$\operatorname{div}\mathbb{F}(P) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{4/3\,\pi\varepsilon^3} \underbrace{\iint_{S_\varepsilon(P)} \mathbb{F} \bullet \hat{\mathbb{N}}\, dS}_{\text{Flödet ut genom } S_\varepsilon(P)}$$

$\rightarrow$ Sfär m. radie ε & centrum i P



Så om F representerar någon typ av strömning så ger $\operatorname{div}\mathbb{F}(P)$ ett mått på hur mycket det flödar ut från (eller inom) P.

Vi skall också senare se att:

$$\operatorname{curl}\mathbb{F} \bullet \hat{\mathbb{N}}(P) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \overbrace{\oint_{C_\varepsilon(P)} \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r}}^{\text{Arbetet runt } C_\varepsilon(P)}$$

$C_\varepsilon(P) \leftarrow$ randkurva till cirkelskiva med centrum i P radie ε & normalvektor $\hat{\mathbb{N}}$.

Curl är stort om kraftfältet roterar mycket

Vi ser att arbetet, dvs cirkulationen är som störst då $\hat{\mathbb{N}} = \frac{\operatorname{curl}\mathbb{F}}{\|\operatorname{curl}\mathbb{F}\|}$ & då är:

$$\|\operatorname{curl}\mathbb{F}\| = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \oint_{C_\varepsilon} \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r}$$

$$\iint_{S_1} \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\, dS = \iint_D \underbrace{\left(2x^2(x^2+y^2)+2y^2(x^2+y^2)-(x^2+y^2)\right)}_{2(x^2+y^2)(x^2+y^2)} dx\,dy = [\text{polära koord.}]$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 (2r^4-r^2)\, r\, dr\right)d\theta = 2\pi\left[\frac{r^6}{3}-\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = \frac{104\pi}{3}$$

På S_2 är $\hat{\mathbb{N}}=\mathbb{k}$ & $\mathbb{F}=4x\,\mathbb{i}+4y\,\mathbb{j}+4\,\mathbb{k}$ så $\iint_S \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbb{N}}\,dS = \iint_S 4\,dS =$

$$= 4\underbrace{\iint_S dS}_{\text{Arean av cirkelskivan } (S_2)} = 4\pi\, 2^2 = 16\pi$$

Det totala flödet ut ur området är:

$$\frac{104\pi}{3}+16\pi = \frac{152\pi}{3}$$

Anm S_1 kan tex också parametriseras med: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r^2 \end{cases}$ $\quad 0\le r\le 2$, $0\le\theta\le 2\pi$

Tips! vänta med polär substitution tills du har dubbelintegralen

→ kalkylerna blir längre → Bättre att vänta med polära koordinaterna tills dubbelintegralen skall beräknas

---

Avsn 16.1

För ett vektorfält $\mathbb{F}=F_1\,\mathbb{i}+F_2\,\mathbb{j}+F_3\,\mathbb{k}$ definierar vi divergensen:

$$\operatorname{div}\mathbb{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z} = \underset{\uparrow}{\nabla}\cdot\mathbb{F}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbb{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbb{k}$$

och rotation:

$$\operatorname{Curl}\mathbb{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbb{i}+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbb{j}+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbb{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \nabla\times\mathbb{F}$$

så cirkulationen är som störst runt curl $\mathbb{F}(P)$ = $\|\mathrm{curl}\,\mathbb{F}(P)\|$ är ett mått på cirkulationens storlek.

Här är $\|\mathrm{curl}\,\mathbb{F}(P)\|$ stort