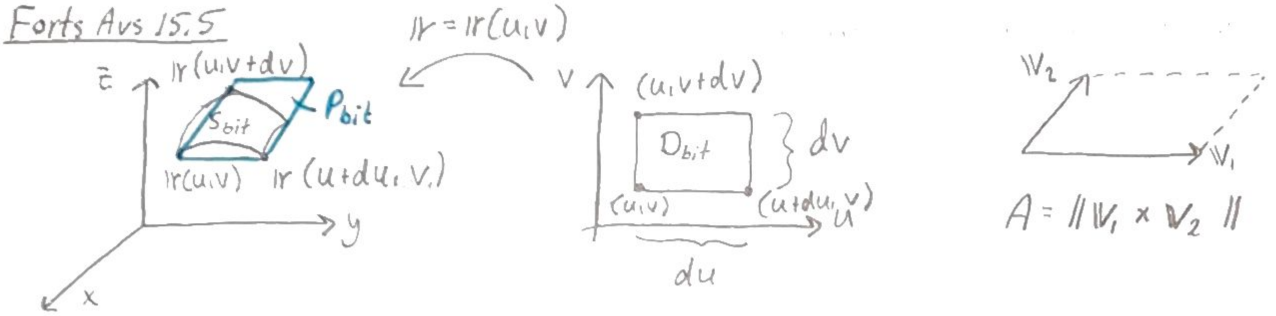
Matteföreläsning 3.6.2. Thomas 21/7-18 Ons

<u>Forts Avs 15.5</u>



Arean av $S_{bit} \approx$ Arean av $P_{bit} = \| (\mathbb{r}(u+du,v) - \mathbb{r}(u,v)) \times (\mathbb{r}(u,v+dv) - \mathbb{r}(u,v)) \|$

$$= \left\| \left(\frac{\mathbb{r}(u+du,v) - \mathbb{r}(u,v)}{du} \right) \times \left(\frac{\mathbb{r}(u,v+dv) - \mathbb{r}(u,v)}{dv} \right) \right\| du\,dv$$

$$\approx \left\| \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} \right\| \underbrace{du\,dv}_{\text{Arean av } D_{bit}}$$

Om man summerar över alla små ytbitar & går i gräns kan man visa:

$$\text{Arean av } S = \iint_D \underbrace{\left\| \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} \right\| du\,dv}_{dS \text{ - areaelementet}} = \iint dS \quad \left(\int_C dS = \|\mathbb{r}'(t)\|\, dt \right)$$

Om vi föreställer oss ytan som ett "skal" med densitetsfunktion $f(x,y,z)$ så är skalets totala massa:

$\iint_S f(x,y,z)\, dS$ Ytintegralen av f över ytan S

<u>Anm</u> f kan även representera laddning eller någon annan fysikalisk storhet & behöver då inte vara positiv.

<u>Ex 1</u> $I = \iint_S (xz+y)\, dS$, där S ges av parametriseringen

$\mathbb{r} = uv\,\mathbb{i} + v^2\,\mathbb{j} + u\,\mathbb{k}$, $(u,v) \in D$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ v & 0 & 1 \\ u & 2v & 0 \end{vmatrix} = -2v\,\mathbb{i} + u\,\mathbb{j} + 2v^2\,\mathbb{k}$$

← avseende på u
← avseende på v

$$I = \iint_D \underbrace{(u^2 v + v^2)}_{(xz+y)} \sqrt{(-2v)^2 + u^2 + (2v^2)^2}\, du\,dv = \ldots\ldots$$

tips att leta efter jämna kvadrater

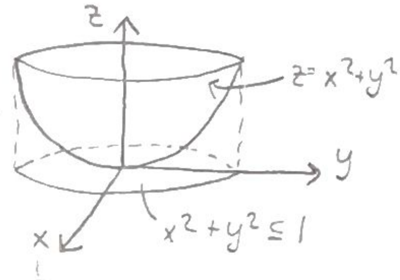
Anm För en funktionsyta med parametrisering:

$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x,y)\,\mathbf{k}$ får vi:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_1(x,y) \\ 0 & 1 & f_2(x,y) \end{vmatrix} = -f_1(x,y)\,\mathbf{i} - f_2(x,y)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

och därmed $dS = \sqrt{(f_1(x,y))^2 + (f_2(x,y))^2 + 1}\;dx\,dy$

Uppgift Beräkna arean av ytan $S:\ z = x^2+y^2,\ x^2+y^2 \le 1$

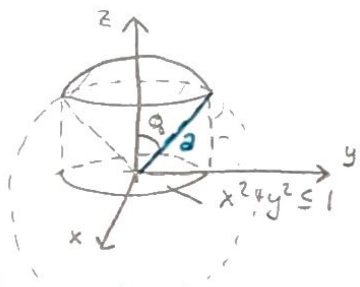


Lösning $\text{Arean} = \iint_S dS = \iint_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1}\;dx\,dy = [\text{polär subst.}] =$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{4r^2+1}\;r\,dr\right)d\theta = 2\pi\left[\frac{1}{8}\,\frac{(4r^2+1)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2}-1\right) \qquad dS = \|\mathbf{r}'\|\,dx\,dy$$

Ex 2 $\iint_S z\,dS\,,\quad S:\ x^2+y^2+z^2 = a^2\,,\quad x^2+y^2 \le 1$



$$\mathbf{r}:\ \begin{cases} x = a\sin\phi\cos\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \\ y = a\sin\phi\sin\theta & 0 \le \phi \le \phi_0 \leftarrow \arcsin\frac{1}{a} \\ z = a\cos\phi \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \qquad \sin\phi_0 = \frac{1}{a}$$

$$= a\sin\phi\,\underbrace{(\underbrace{a\sin\phi\cos\theta}_{x}\,\mathbf{i} + \underbrace{a\sin\phi\sin\theta}_{y}\,\mathbf{j} + \underbrace{a\cos\phi}_{z}\,\mathbf{k})}_{\mathbf{r}}$$

Så areaelementet på en sfär med radie a är i sfäriska koordinater

$$dS = \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right\| d\phi\,d\theta = \boxed{a^2\sin\phi\;d\phi\,d\theta}$$

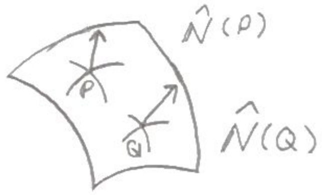
Areaelementet i sfäriska koordinater

Bra att kunna utantill då den alltid gäller för sfäriska koordinater.

$$\iint z\,dS = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\phi_0} \underbrace{a\cos\phi}_{z}\, a^2\sin\phi\, d\phi\right)d\theta = a^3 2\pi\left[\frac{1}{2}\underbrace{\sin^2\phi}_{\frac{1}{a^2}}\right]_0^{\phi_0} = a\pi$$

Avs. 15.6

Antag att vi i varje punkt (x,y,z) på en yta S väljer en normalvektor $\hat{\mathbb{N}}(x,y,z)$ med längden 1 som varierar kontinuerligt utefter ytan. (Vi har två val)



Vi har då valt en orientering av ytan & den sida åt vilket $\hat{\mathbb{N}}$ pekar kallas den positiva sidan (den andra är den negativa).
Det finns ytor som inte är orienterbara, tex möbiusband (har en sida)
Antag att ett vektorfält $\mathbb{F}$ beskriver ett flöde & vi söker den mängd av det strömmande mediet som per tidsenhet passerar en yta S i den valda ytnormalens riktning.

Flödets storlek i normalens riktning är:
$\|\mathbb{F}\|\cos\theta = \|\mathbb{F}\|\,\|\hat{\mathbb{N}}\|\cos\theta = \mathbb{F}\bullet\hat{\mathbb{N}}$
så det totala flödet genom S ges av $\iint_S \mathbb{F}\bullet\hat{\mathbb{N}}\,dS$
Om $\mathbb{r}=\mathbb{r}(u,v)$ är en parametrisering av en yta S så är:
$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v}$ vinkelrät mot ytan & således är:

$$\hat{\mathbb{N}} = \frac{\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} \right\|}$$

Sedan tidigare vet vi att $dS = \left\| \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} \right\| du dv$

så $\iint_S \mathbb{F} \bullet \hat{\mathbb{N}} \, dS = \pm \iint \mathbb{F} \bullet \left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} \right) du dv$