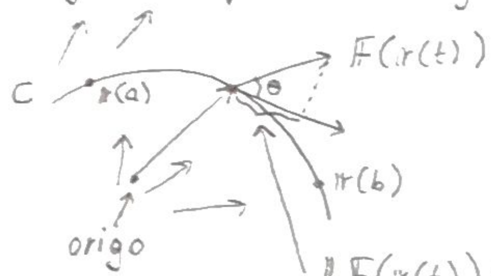
Matteföreläsning 3.6.1. Thomas $19/2$-18 Mån

Avs. 15.4

Antag att en partikel rör sig längs en kurva C i ett kraftfält $\mathbb{F}$.



$$\|\mathbb{F}(\mathbb{r}(t))\| \cos\theta = \|\mathbb{F}(\mathbb{r}(t))\| \left\| \frac{\mathbb{r}'(t)}{\mathbb{r}'(t)} \right\| \cos\theta = \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \bullet \frac{\mathbb{r}'(t)}{\|\mathbb{r}'(t)\|}$$

Det arbete fältet uträttar (dvs den energi fältet tillför partikeln) vid förflyttning längs C är:

$$\underbrace{\int_a^b \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \bullet \frac{\mathbb{r}'(t)}{\|\mathbb{r}'(t)\|}}_{\substack{\text{Kraftens storlek i} \\ \text{partikelns rörelseriktning}}} \, \overset{\|\mathbb{r}'(t)\|\,dt}{ds} = \int_a^b \underbrace{\mathbb{F}(\mathbb{r}(t))}_{(F_1, F_2)} \bullet \underbrace{\mathbb{r}'(t)}_{(x'(t),\, y'(t))} dt =$$

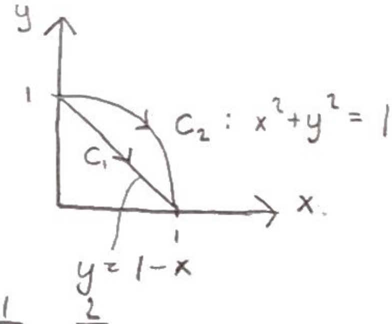
$$= \int_a^b F_1(x(t), y(t)) \underbrace{x'(t)\,dt}_{dx} + F_2(x(t), y(t)) \underbrace{y'(t)\,dt}_{dy} = \int F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy$$

$$= \int_C \mathbb{F} \bullet \underbrace{dr}_{(dx,\,dy)}$$

kallas kurvintegralen av fältet $\mathbb{F}$ längs C

Anm Om C är en sluten kurva så skriver vi $\oint_C \mathbb{F} \bullet dr$ & man säger att integralen ger cirkulationen av $\mathbb{F}$ runt C

Ex 1 $\int_C \mathbb{F} \bullet dr$, där $\mathbb{F} = (x+y^2)\mathbb{i} + xy\,\mathbb{j}$ och

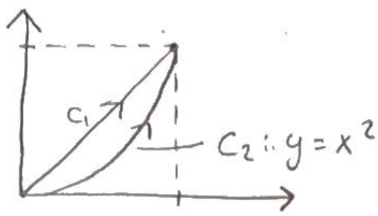


C_1: $\mathbb{r} = t\,\mathbb{i} + (1-t)\mathbb{j}$, $0 \xrightarrow{t} 1$ Parametrisering

$$\int_{C_1} \mathbb{F}\,dr = \int_{C_1} (x+y^2) \underbrace{dx}_{x'(t)dt} + xy \underbrace{dy}_{y'(t)dt} = \int_0^1 \left(t + (1-t)^2\right) dt +$$

$$+ t(1-t)(-1)\,dt = \left[\frac{-(1-t)^3}{3} + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

<u>Ex 2</u> $\int_C (y+2x)\,dx + x\,dy \quad , \quad \mathbb{F} = (y+2x)\,\mathbb{i} + x\,\mathbb{j}$



$C_1 : \mathbb{r} = t\,\mathbb{i} + t\,\mathbb{j} \quad , \quad 0 \xrightarrow{t} 1$

$$\int_{C_1} (y+2x)\,dx + x\,dy = \int_0^1 4t\,dt = \left[2t^2\right]_0^1 = 2$$

$C_2 : \mathbb{r} = t\,\mathbb{i} + t^2\,\mathbb{j} \quad , \quad 0 \xrightarrow{t} 1$

$$\int_{C_2} (y+2x)\,dx + x\,dy = \int_0^1 (2t+t^2)\overbrace{dt}^{dx} + t \cdot \overbrace{2t\,dt}^{dy} = \dots = 2$$

$\rightarrow$ *Arbetet samma oavsett vald väg från P_0 till P_1*

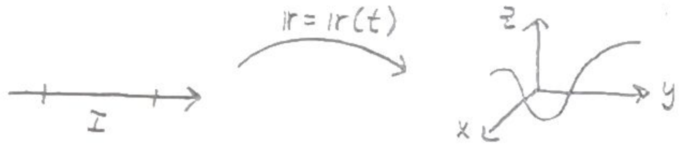
<u>Alt lösning</u> $\mathbb{F} = (y+2x)\,\mathbb{i} + x\,\mathbb{j}$ är konservativt med potential

$\phi(x,y) = xy + x^2$ (se tidigare förel.) . så :

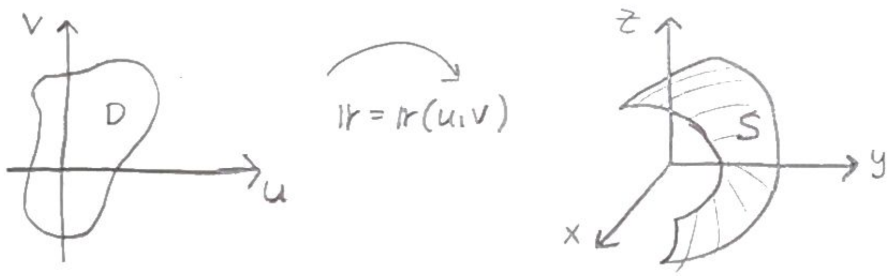
$$\int_C (y+2x)\,dx + x\,dy = \underbrace{\phi(1,1)}_{2} - \underbrace{\phi(0,0)}_{0} = 2$$

<u>Avs 15.5</u>

I tidigare avsnitt har vi parametriserat kurvor :

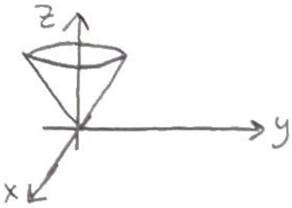


På liknande sätt kan vi parametrisera ytor :



Ex 3 $\mathbf{r} = \underbrace{u\cos v}_{x}\,\mathbf{i} + \underbrace{u\sin v}_{y}\,\mathbf{j} + \underbrace{u}_{z}\,\mathbf{k}$, $D: 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 2\pi$

är en parametrisering av konen $x^2+y^2=z^2,\ x^2+y^2 \le 1$



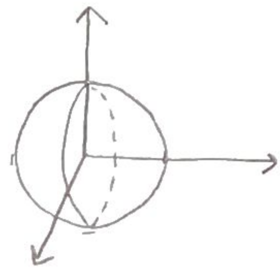
Anm Parametrarna behöver inte heta u & v

Ex 4 $\mathbf{r} = 3\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + 3\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + 3\cos\phi\,\mathbf{k}$

$D: 0 \le \phi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

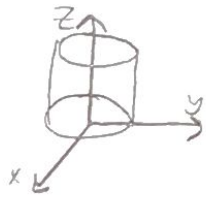
Beskriver en sfär med radie 3

intervallet på ϕ är upp till π då 2π skulle ge dubbel volym då intervallet även skall rotera.



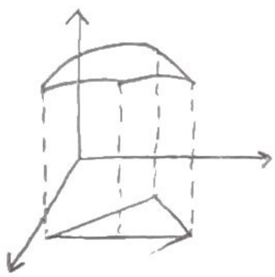
Ex 5 $\mathbf{r} = 3\cos\theta + 3\sin\theta\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $D: 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 1$

Beskriver en cylinder med basradie 3 & höjden 1



Anm En funktionsyta $z=f(x,y)$, $(x,y) \in D$ parametriseras naturligt av:

$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x,y)\,\mathbf{k}$, $(x,y) \in D$



Ex 6 Konen i ex ovan kan oxo parametriseras av $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{i} + \sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{k}$

$D: x^2+y^2 \le 1$

$C_2: \mathbf{r} = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}\,,\quad \frac{\pi}{2} \overset{t}{\curvearrowright} 0$

$$\int_{C_2} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_{C} (x+y^2)\,dx + xy\,dy = \int_{\pi/2}^{0} (\cos t + \sin^2 t)(-\sin t)\,dt \;+$$

$$+\int_{\pi/2}^{0} \cos t \sin t \cos t \; dt = \int_{\pi/2}^{0} (\cos t + 1 - 2\cos^2 t)(-\sin t) =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cos^2 t + \cos t - \frac{2}{3}\cos^3 t\right]_{\pi/2}^{0} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

$\rightarrow$ Det svåra är att hitta parametriseringen

$\boxed{\text{Sats}}$ Om $\mathbf{F}$ är ett vektorfält definierat i ett öppet sammanhängande område D så är följande ekvivalent:

a) $\mathbf{F}$ är konservativt i D

b) $\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = 0$, för varje styckvis kont. & sluten kurva C i D.

c) Givet två punkter P_0 & P_1 i D så har $\int \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ samma värde för alla styckvis kont. kurvor C i D från P_0 till P_1

$\boxed{\text{Bevis}}$ Bevis av a leder till c

F konservativt $\longrightarrow$ $$\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_C \overbrace{\nabla\phi}^{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right)} \bullet \overbrace{d\mathbf{r}}^{(dx,dy)} = \int_C \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt = \int_a^b \underbrace{\frac{d\phi}{dt}}_{\phi'(t)}\,dt = \Big[\phi(\mathbf{r}(t))\Big]_{t=a}^{t=b} = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)) =$$

$$= \phi(P_1) - \phi(P_0)$$ $\rightarrow$ oberoende av vägen C $\blacksquare$