Matteföreläsning 3.5.3. Thomas 14/2-18 Ons

Forts avs 15.1

Betrakta ett vektorfält i $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z) + F_2(x,y,z) + F_3(x,y,z)\mathbb{k}$

Fältlinjerna fås som lösning på systemet: $\dfrac{dx}{F_1(x,y,z)} = \dfrac{dy}{F_2(x,y,z)} = \dfrac{dz}{F_3(x,y,z)}$

Speciellt om $\mathbb{F}$ är ett plant vektorfält så ges $\underbrace{\text{fältlinjerna}}_{\text{kurvor}}$ av: $\dfrac{dx}{F_1(x,y)} = \dfrac{dy}{F_2(x,y)}$

Ex 1 $\mathbb{F}(x,y) = \underbrace{x(1-y)}_{F_1}\mathbb{i} + \underbrace{(1+x)y}_{F_2}\mathbb{j}$

$$\frac{dx}{x(1-y)} = \frac{dy}{(1+x)y} \iff \frac{1+x}{x}\,dx = \frac{1-y}{y}\,dy \iff \ln|x| + x = \ln|y| - y + C$$

$$\iff \underbrace{xe^{x} = Dye^{-y}}_{\text{Beskriver fältlinjerna implicit}}$$

Avs 15.2

$\boxed{\text{Def}}$ Ett vektorfält $\mathbb{F}$ sägs vara konservativt i ett område D om det finns en funktion ϕ s.a. $\nabla\phi = \mathbb{F}$ på D. ϕ sägs då vara en potential till $\mathbb{F}$.

Anm Många naturligt förekommande vektorfält är konservativa.

Ex 2 $\mathbb{F}(x,y,z) = -km\dfrac{x\mathbb{i} + y\mathbb{j} + z\mathbb{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ (gravitationsfält) är konservativt med

potential $\phi(x,y,z) = \dfrac{km}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\boxed{\text{Sats}}$ Om $\mathbb{F}(x,y) = F_1(x,y)\mathbb{i} + F_2(x,y)\mathbb{j}$ är ett konservativt plant vektorfält på D så är:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y),\ \text{för alla } (x,y) \in D}_{\text{Nödvändigt villkor för att ett plant vektorfält skall vara konservativt}}$$

$\boxed{\text{Bevis}}$ Om $\mathbb{F}(x,y) = \nabla\phi(x,y)$ så är:

$$\begin{cases} F_1(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\phi(x,y) & \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial y}F_1(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial y\partial x}\phi(x,y) \\ F_2(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\phi(x,y) & \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}F_2(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\phi(x,y) \end{cases}$$

<u>Ex 3</u> $\mathbb{F}(x,y) = x(1-y)\mathbf{i} + (1+x)y\,\mathbf{j}$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x(1-y)) = -x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}((1+x)y) = y \quad \# \quad \Rightarrow F \text{ är ej konservativt}$$

<u>Ex 4</u> $\mathbb{F}(x,y) = (y+2x)\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{(y+2x)}_{F_1} = 1 = \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{(x)}_{F_2}$$

så f <u>kan vara</u> konservativt (högst troligt men ej 100% säkert)

Låt oss undersöka om det finns något ϕ sådant att $\nabla\phi = \mathbb{F}$:

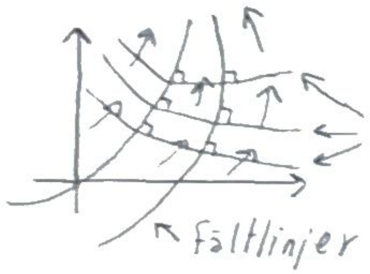
$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = y + 2x & \Rightarrow \phi = yx + x^2 + C(y) \\ & \qquad\Downarrow \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = x & \quad \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = x + C'(y) \end{cases}$$

så $C'(y) = 0$ om F är konservativt, dvs $C(y) = k$

så $\mathbb{F}$ är konservativt med potential $\phi(x,y) = yx + x^2 + k$

<u>Anm</u> Alla potentialer till ett konservativt fält skiljer sig bara åt med en konstant.

<u>Anm</u> Nivåkurvorna till potentialen $\phi(x,y)$ kallas ekvipotentialkurvor. Eftersom $\nabla\phi = \mathbb{F}$ ger normalvektorer till dessa kurvor så skär de fältlinjerna med rät vinkel.



Anm På ett liknande sätt som i $\mathbb{R}^3$ kan man visa att om

$\mathbb{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\mathbb{i} + F_2(x,y,z)\mathbb{j} + F_3(x,y,z)\mathbb{k}$ är konservativt i $D \subseteq \mathbb{R}^3$

så är: $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$, $\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$

Ex 5 $\mathbb{F} = xyz\,\mathbb{i} + (x-y+z)\mathbb{j} + (xy+z)\mathbb{k}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = xz \neq \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1$$

$\therefore$ $\mathbb{F}$ är ej konservativt

Ex 6 $\mathbb{F} = \underbrace{y^2 z}_{F_1}\,\mathbb{i} + \underbrace{(2xyz + z^2)}_{F_2}\mathbb{j} + \underbrace{(xy^2 + 2yz + 2z)}_{F_3}\mathbb{k}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2yz = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = y^2 = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = 2xy + z = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

$\therefore$ $\mathbb{F}$ kan vara konservativt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \underbrace{y^2 z}_{F_1} \Leftrightarrow \Phi = y^2 z x + g(y,z) \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \underbrace{2xyz + z^2}_{F_2} = 2xyz + g_1(y,z)$$

$$\rightarrow g_1(y,z) = z^2 \Rightarrow g(y,z) = z^2 y + h(z)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \underbrace{xy^2 + 2yz + 2z}_{F_3} = \underbrace{y^2 x + 2zy + h'(z)}_{\text{kom från det vi vet om } \Phi \text{ sedan innan}} \rightarrow h'(z) = 2z,\ h(z) = z^2 + C$$

$\therefore$ $\mathbb{F}$ är konservativt med potential $\Phi(x,y,z) = xy^2 z + yz^2 + z^2 + C$

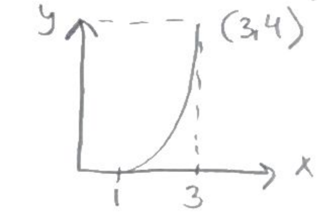
Avs 15.3

Vi vet sedan tidigare att om $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, $a\le t\le b$, är en (ett-ett) parametisering av en kurva C så är längden av $C=\int_a^b \underbrace{\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt}_{ds\text{ - båglängdselementet}}$

Om kurvan representerar en "tråd" med varierande densitet $f(\mathbf{r})$, $\mathbf{r}=(x,y,z)$, så är trådens totala massa $= \underbrace{\int_C f(\mathbf{r})\,ds}_{\text{kurvintegralen av funktionen } f \text{ längs kurvan } C}$

Anm kurvintegralen kan representera annat än massa. Tex laddning kan då oxo vara negativ

Ex 7 $\quad f(x,y,z)=x^2-y-x$, $\quad C: \mathbf{r}=(t+1)\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}$, $\quad 0\le t\le 2$



$\mathbf{r}'(t)=\mathbf{i}+2t\mathbf{j}$

$$\int_C f(\mathbf{r})\,ds=\int_0^2 f(\mathbf{r}(t))\underbrace{\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt}_{ds}=$$

$$=\int_0^2 \left((t+1)^2-t^2-(t+1)\right)\sqrt{1+4t^2}\,dt=$$

$$=\int_0^2 t\sqrt{1+4t^2}\,dt=\left[\frac{1}{8}\cdot\frac{(1+4t^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^2=\frac{1}{12}\left(17^{3/2}-1\right)$$