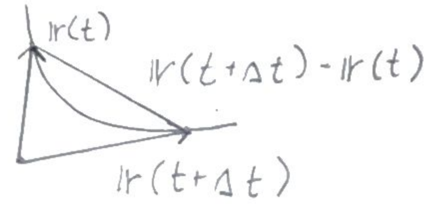
Matteföreläsning 3.5.2 Thomas 13/2-18 Tis

Forts avs 8.2, 11.1, 11.3

Antag att $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ beskriver en partikels position i xy-planet vid tiden t. Vi kan studera hur positionen förändras relativt tiden:

$$\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$



Gränsvärdet då $\Delta t \to 0$ ger hastigheten $\mathbf{v}(t)$ hos partikeln vid tiden t.

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\mathbf{j} \right) =$$

$= x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} = \mathbf{r}'(t)$ hastighetsvektorn

$\to$ hastigheten har blivit en vektor!

Obs! Derivering sker alltså komponentvis

Hastighetsvektorn $\mathbf{v}(t)$ tangerar kurvan i $\mathbf{r}(t)$ o pekar i partikelns rörelseriktning.

Längden av hastighetsvektorn ger ett mått på partikelns fart.

$v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$

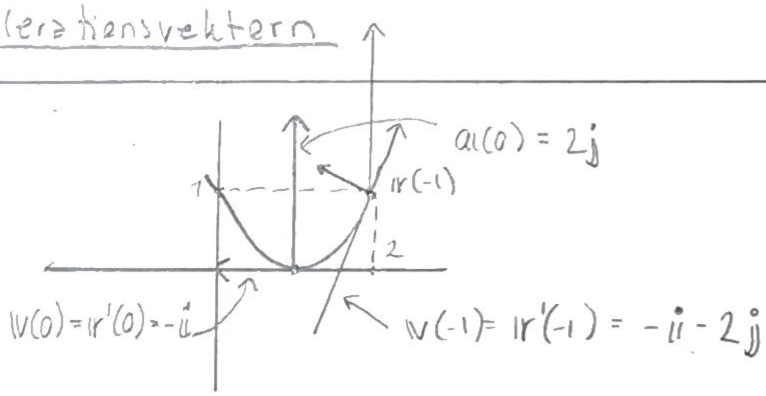
Vi kan också studera hur hastigheten förändras relativt tiden o får då accelerationen:

$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$ Accelerationsvektorn

---

Ex 1 $\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$

$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) - \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$

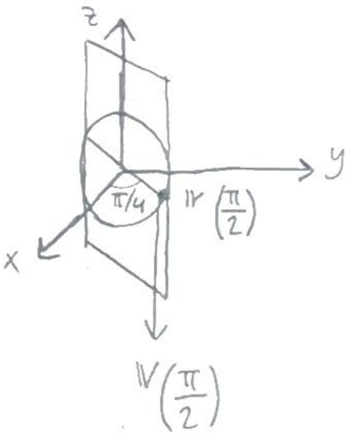


Ovanstående begrepp & definitioner är analoga för kurvor i rummet.

Ex 2 $\quad \mathbf{r}(t) = \underbrace{\sqrt{2}\sin t}_{2\sin t\cos\frac{\pi}{4}}\,\mathbf{i} + \underbrace{\sqrt{2}\sin t}_{2\sin t\sin\frac{\pi}{4}}\,\mathbf{j} + 2\cos\mathbf{k}\,, \quad -\pi < t \leq \pi$

(samma som $2\sin t\cos\frac{\pi}{4}$)

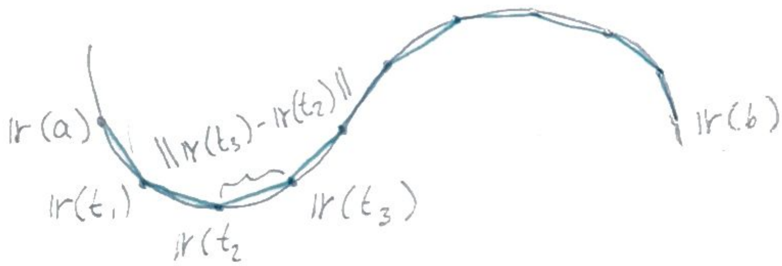
Beskriver en cirkel i planet $x = y$ med centrum i origo & radie 2.



$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \sqrt{2}\cos t\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\cos t\,\mathbf{j} - 2\sin t\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -\sqrt{2}\sin\mathbf{i} - \sqrt{2}\sin t\,\mathbf{j} - 2\cos\mathbf{k}$$

Avs 11.3



$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n = b$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{n} \frac{\|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\|}{\Delta t_i}\,\Delta t_i$$

$$\rightarrow \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \int_a^b \underbrace{\|\mathbf{v}(t)\|}_{\text{hastigheten}}\,dt = \int_a^b \underbrace{v(t)}_{\text{farten}}\,dt$$

Ger längden på kurvan från $\mathbf{r}(a)$ till $\mathbf{r}(b)$

$ds = \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$ kallas för båglängdselement

Man kan visa att denna formen för kurvlängd inte beror på vilken parametrisering man valt.

Ex 3 $\mathbb{r}(t) = t^2\,\mathbb{i} + 2t\,\mathbb{j} + \ln t\,\mathbb{k}$, $1 \le t \le 3$

längden av kurvan $= \int_1^3 \|\mathbb{r}'(t)\|\,dt = \int_1^3 \sqrt{(2t)^2 + 2^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dt = \int_1^3 \sqrt{\left(2t + \frac{1}{t}\right)^2}\,dt =$

Tips: Undersök om det som står under rottecknet blir en jämn kvadrat

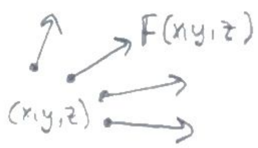
$= \int_1^3 \left|2t + \frac{1}{t}\right| dt = \int_1^3 \left(2t + \frac{1}{t}\right) dt = \left[t^2 + \ln t\right]_1^3 = 8 + \ln 3$

Avs 15.1

Vi skall nu studera funktioner från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\,\mathbb{i} + F_2(x,y,z)\,\mathbb{j} + F_3(x,y,z)\,\mathbb{k}$ Obs! ej derivator!

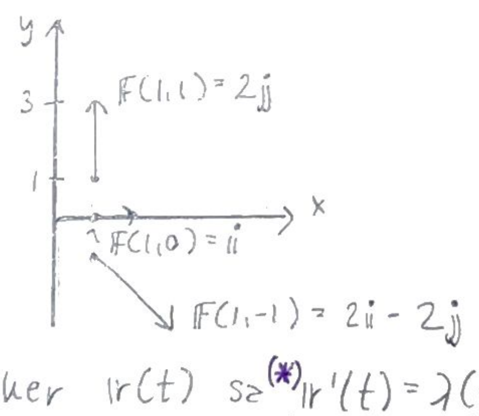
Sådana funktioner kan tolkas som vektorfält



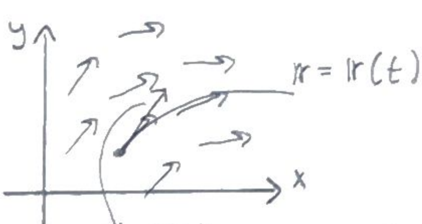
Många fysikaliska fenomen beskrivs av vektorfält, tex flöden, gravitation, magnetfält o andra kraftfält.

Funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$; $\mathbb{F}(x,y) = F_1(x,y)\,\mathbb{i} + F_2(x,y)\,\mathbb{j}$ kan pss tolkas som ett plant vektorfält o kan betraktas som ett vektorfält från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^2$ där $F_3 \equiv 0$ o F_1, F_2 är oberoende av z.

Ex 4 $\mathbb{F}(x,y) = x(1-y)\,\mathbb{i} + (1+y)\,\mathbb{j}$



Ex 5



Vi söker $\mathbb{r}(t)$ så (*) $\underbrace{\mathbb{r}'(t)}_{\text{tangentvektor}} = \underset{\text{skalär funktion}}{\lambda(t)}\,\underbrace{\mathbb{F}(\mathbb{r}(t))}_{\text{fältvektor}}$

$\mathbb{r}'(t)$ → rör sig i tangentens riktning

En kurva $\mathbb{r} = \mathbb{r}(t)$ som uppfyller detta sägs vara en fältlinje till vektorfältet $\mathbb{F}$. (eller strömlinje/flödeslinje om $\mathbb{F}$ beskriver en strömning/flöde)

$$(*) \iff \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda F_1(x,y,z) \\ \dfrac{dy}{dt} = \lambda F_2(x,y,z) \\ \dfrac{dz}{dt} = \lambda F_3(x,y,z) \end{cases} \iff \frac{dx}{F_1(x,y,z)} = \frac{dy}{F_2(x,y,z)} = \frac{dz}{F_3(x,y,z)}$$

Speciellt om $\mathbb{F}$ är ett plant vektorfält så ges fältlinjerna av:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda F_1(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = \lambda F_2(x,y) \end{cases} \iff \frac{dx}{F_1(x,y)} = \frac{dy}{F_2(x,y)}$$