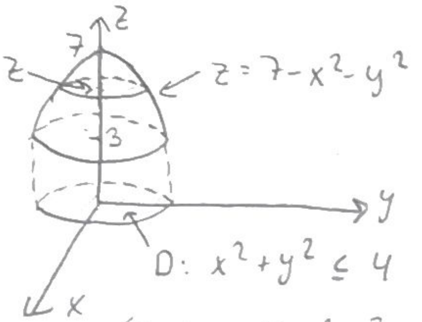
Matteföreläsning 3.5.1. Thomas 12/2-18

<u>uppgift</u> Beräkna massan av den kropp K som begränsas av paraboloiden $z = 7 - x^2 - y^2$ o planet $z = 3$ o som består av ett material med densiteten $\delta(x,y,z) = z$

<u>lösning</u>



$(z = 3 \to 7 - x^2 - y^2 = 3)$

Massan av $K = \iiint_K \delta(x,y,z)\,dV =$

$$= \iint_D \left(\int_3^{7-x^2-y^2} z\,dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_D \left[\frac{z^2}{2} \right]_3^{7-x^2-y^2} dx\,dy = \frac{1}{2} \iint_{\substack{D \\ x^2+y^2 \le 4}} \left((7 - x^2 - y^2)^2 - 9 \right) dx\,dy$$

$$= [\text{polär substitution}] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left((7 - r^2)^2 - 9 \right) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Jacobideterminanten}}}{r}\, dr \right) d\theta = \pi \left[-\frac{1}{6}(7 - r^2)^3 - \frac{9}{2} r^2 \right]_0^2$$

$$= \underline{\frac{104\pi}{3}}$$

<u>Alt lösn</u> Massan av $K = \int_3^7 \left(\underline{\iint_{x^2+y^2 \le 7-z} z\,dx\,dy} \right) dz = \int_3^7 z\, \underline{\pi (\sqrt{7 - z})^2}\, dz =$

$$= \pi \int_3^7 z(7 - z)\,dz = \pi \left[\frac{7}{2} z^2 - \frac{z^3}{3} \right]_3^7 = \underline{\frac{104\pi}{3}}$$

<u>Forts 14.6</u>

$$\iiint_D f(x,y,z)\, \underline{dx\,dy\,dz} = \iiint_S f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \underline{\overbrace{\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right|}^{\text{determinant m. beloppst.}}}\, du\,dv\,dw$$

Sfärisk substitution

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\phi \sin\theta$$
$$z = \rho \cos\phi$$

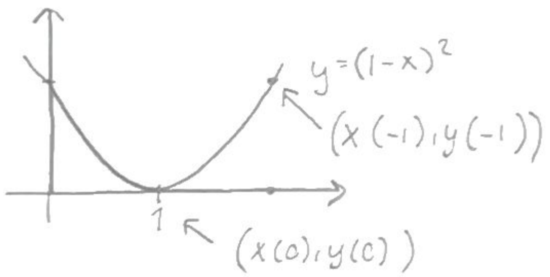
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{vmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sid. 845}}}{\ldots} = \rho^2 \sin\phi$$

Avs 8.2, 11.1, 11.3

Betrakta en funktion $\mathbb{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \xrightarrow{\mathbb{f}} (x(t), y(t))$

En naturlig tolkning av $\mathbb{f}$ är att tänka sig $(x(t), y(t))$ som positionen vid tiden t hos en partikel som rör sig i xy-planet.

Ex $\begin{cases} x(t) = 1-t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$ Notera att $y(t) = (1-x(t))^2$ så punkterna $(x(t), y(t))$ ligger alla på parabeln $y = (1-x)^2$



Positionen vid tiden t beskrivs ofta på vektorformen $\underbrace{\mathbb{r}(t) = x(t)\mathbb{i} + y(t)\mathbb{j}}_{\text{positionsvektorn}}$

Då t genomlöper ett intervall beskriver partikelbanan en kurva i xy-planet.

Omvänt kan varje kurva i xy-planet beskrivas på formen $\underbrace{\mathbb{r}(t) = x(t)\mathbb{i} + y(t)\mathbb{j}}$, $t \in I$ på oändligt många sätt

sägs vara en parametrisering av kurvan

Ex Parabelstycken $y = (1-x)^2$, $-1 \leq t \leq 1$, kan tex oxo beskrivas med parametriseringarna:

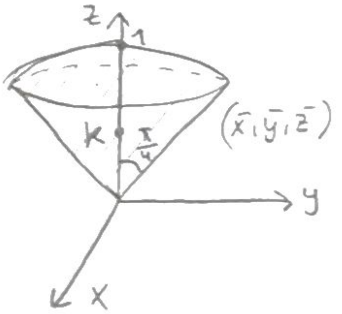
$\mathbb{r}(t) = (1+t)\mathbb{i} + t^2\mathbb{j}$; $-1 \leq t \leq 1$ (Omvänd rörelseriktning)

$\mathbb{r}(t) = (1+t^3)\mathbb{i} + t^6\mathbb{j}$; $-1 \leq t \leq 1$ (Ändrad förflyttningshastighet)

$\mathbb{r}(t) = t\mathbb{i} + (t-1)^2\mathbb{j}$, $0 \leq t \leq 2$ (tidsförskjutning)

uppgift Bestäm masscentrum $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ av den kropp K som begränsas av sfären $x^2+y^2+z^2=1$ å konen $z^2=x^2+y^2$, $z \geq 0$ å som har konstant densitet (homogent material)

lösning



Av symmetriskäl är $\bar{x} = \bar{y} = 0$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_K z\, \delta(x,y,z)\, dV}{\iiint_K \delta(x,y,z)\, dV} \qquad \Big| \quad \iiint_K (z-\bar{z})\,\delta(x,y,z)\, dV = 0$$

$$\boxed{= \frac{\iiint_K z\, dV}{\iiint_K dV}} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

(2) $$\iiint_K dV = \int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho^2 \sin\phi \, d\rho\right) d\theta\right) d\phi = 2\pi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi/4} = \frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

↑ sfärisk subst.

Obs! Samma som tidigare föreläsning

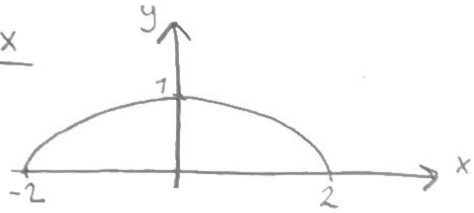
(1) $$\iiint_K z\, dV = \int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \underbrace{\rho\cos\phi}_{z} \, \underbrace{\rho^2 \sin\phi \, d\rho}_{\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}\right|}\right) d\theta\right) d\phi =$$

$$\boxed{\int_a^b\left(\int_c^d f(x) g(y)\, dy\right) dx = \int_a^b f(x)\left(\int_c^d g(y)\, dy\right) dx = \left(\int_c^d g(y)\, dy\right)\left(\int_a^b f(x)\, dx\right)}$$

$$= 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

$$\bar{z} = \frac{\pi/8}{\frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{3\sqrt{2}}{16(\sqrt{2}-1)} \qquad (\approx 0{,}64)$$

Ex



$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \, , \quad y \geq 0$$

① $\mathbb{r}(t) = t\,\mathbb{i} + \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}\,\mathbb{j} \, , \quad -2 \leq t \leq 2$

② $\mathbb{r}(t) = 2\cos t\,\mathbb{i} + \sin t\,\mathbb{j} \, , \quad 0 \leq t \leq \pi$

③ $\mathbb{r}(t) = 2\sin t\,\mathbb{i} + \cos t\,\mathbb{j} \, , \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$