Matteföreläsning 3.4.2. Thomas 1/2-18 Ons

Forts 14.4

Sats Om $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ är en ett-ett avbildning från S till D med kont. partiella derivator så är:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv}$$

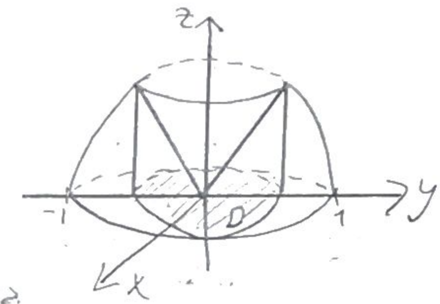
Tre saker ändras:
1. Området = D
2. funktionen = $f(x,y)$
3. Areaelementet = $dx\,dy$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$ = Alltid positivt ty kopplat till area

---

Ex1

Låt k vara den kropp som begränsas av sfären $x^2+y^2+z^2=1$ o kurvan $z^2 = x^2+y^2$, $z \geq 0$



Projecera ner arean for att få D:

Volymen av $k = \iint_{D:\, x^2+y^2=1/2} \left(\sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right) =$

Ser man att x^2+y^2 är polär är substitution ofta bra.

Skärningspunkt: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z^2 = x^2+y^2 \end{cases} \rightarrow 2(x^2+y^2) = 1$, $x^2+y^2 = 1/2 = D$

$$= \begin{bmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\sqrt{1-r^2} - r\right) r\,dr \right) d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{2} \frac{(1-r^2)^{3/2}}{3/2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^{1/\sqrt{2}} =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$$

Avs 14.5 Trippelintegraler

Defition, egenskaper o beräkningsmetoder för trippelintegraler

$\iiint_k f(x,y,z)\, \underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV \text{ - Volymelementet}}$ är i stort sett analoga med de för dubbelintegraler

Värdet på en trippelintegral (om $f(x,y,z) > 0$) kan tolkas som massan av en kropp, kd, $f(x,y,z)$ är densiteten i (x,y,z)
$\to \delta(x,y,z)$

Speciellt är $\iiint_k dV =$ Volymen av k (Om $f(x,y,z) = 1$)

Ex 1 $I = \iiint_k x e^{xz+y} \, dV$, $k: \underbrace{0<x<1,\ 1<y<3,\ -1<z<2}_{\text{rätblock, snällast}}$

Välj noga vilken ordning på x,y,z. Nu x jobbigast & börjar med

$$I = \int_0^1 \left(\int_1^3 \left(\int_{-1}^2 x \cdot e^{xz+y} \, dz \right) dy \right) dx = [e^y]_1^3 \int_0^1 [e^{xz}]_{-1}^2 \, dx =$$

$$= (e^3 - e^1) \int_0^1 (e^{2x} - e^{-x}) \, dx = \dots = (e^3 - e)\left(\frac{1}{2} e^2 + e^{-1} - \frac{3}{2}\right)$$

Det svåra kan vara att sätta upp gränser, sen är det bara att integrera i en variabel.

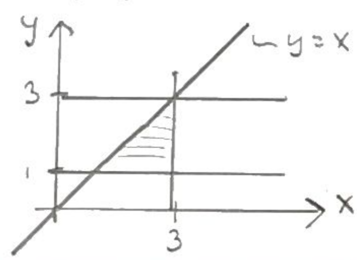
Detta samband utnyttjades nu, sparar tid men behövs ej:

$$\boxed{\iiint f(x) g(y) h(z) \, dx\,dy\,dz = \int f(x)\,dx \int g(y)\,dy \int h(z)\,dz}$$

Ex 3 $I = \iiint f(x,y,z) \, dV$, $k: \underbrace{1<y<3,\ y<x<3,}_{\text{beror ej på z – området i xy-plan}}\ 0<z<x-y$

$$I = \underbrace{\int_1^3 \left(\int_y^3 \left(\int_0^{x-y} f(x,y,z) \, dz \right) dx \right) dy}_{\text{kan skrivas på } 3\cdot 2\cdot 1 = 6 \text{ sätt}} = \int_1^3 \left(\int_1^x \left(\int_0^{x-y} f(x,y,z) \, dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_1^{3-z} \left(\int_{y+z}^3 f(x,y,z) \, dx \right) dy \right) dz = \dots \text{ 3 andra sätt}$$



Anm: $\int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} (f(x,y,z) \, dz \right) dy \right) dx$

Rita upp en bild i 2 plan. kasta om x & z. Rita i xz-planet

- Alltid fixa värden ytterst
- Mittersta gränser får bara bero på yttersta
- Innersta gränser får bero på båda

Avs 14.6 Variabelsubstitution i trippelintegraler

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

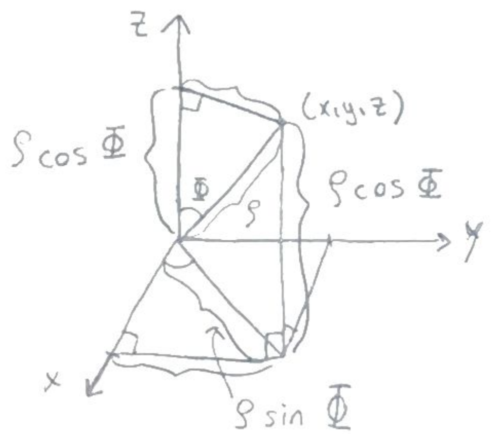
Sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = \rho \sin \Phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \Phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \Phi \end{cases}$$

ρ = rå = avstånd till origo

Φ = fi = vinkel <u>till</u> z-axeln

θ = tita = vinkel <u>runt</u> z-axeln

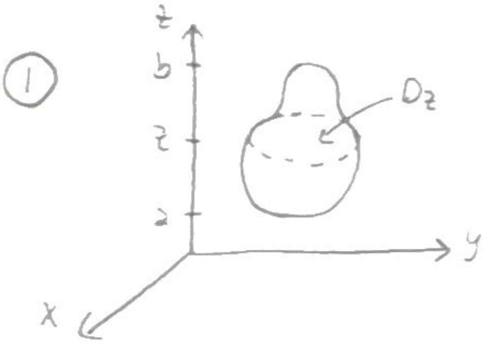


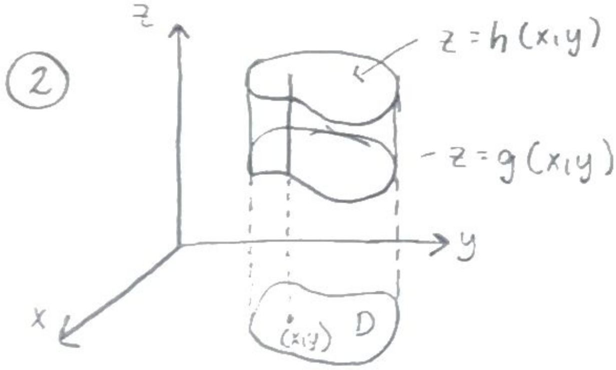
Två metoder

① Om K är av typen $a \leq z \leq b$ $\quad (x,y) \in D_z$ så är:

område i xy-planet som beror på z

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$

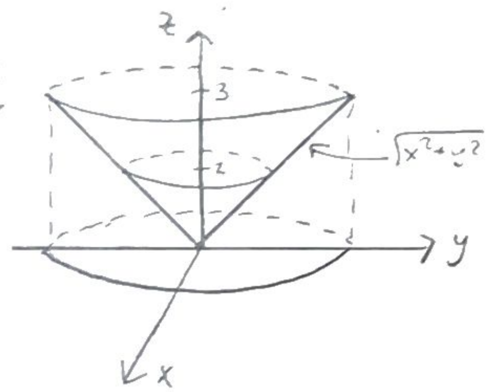




② Om K är av typen $(x,y) \in D$ $\quad g(x,y) \leq z \leq h(x,y)$ så är:

$$\boxed{\iiint_K f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy}$$

Ex 4 $\quad I = \iiint_K f(x,y,z)\,dV$, $\quad K: 0 \leq z \leq 3$, $\underbrace{\sqrt{x^2+y^2} \leq z}_{\text{kon}}$



Skivmetoden:

$$I = \int_0^3 \left(\underbrace{\iint_{x^2+y^2 \leq z^2}}_{} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$

Beskriver cirkeln vi får när vi skivar i z-led

Stickmetoden:

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 9} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$