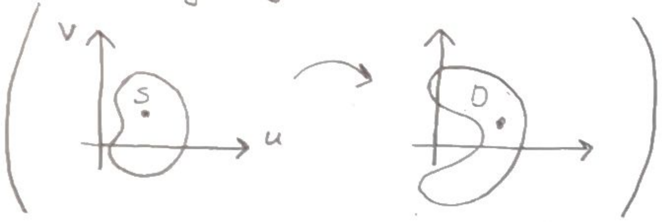
Motsvarande finns för funktioner av flera variabler.

Sats Om $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ är en ett-ett-avbildning från S till D. så är:
(med kont partiella derivator)

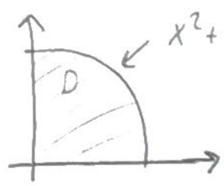


determinanten av jakobimatrisen

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \quad \text{där}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Ex 3 $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$



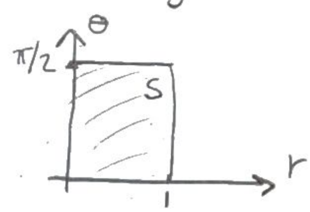
$x^2+y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

Vi byter till polära koordinater:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Vilket motsvarar en ett-ett-avbildning från

S: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 < r < 1$



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta =$$

$$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

så $$I = \iint_S \frac{1}{1+r^2}\, r\,dr\,d\theta = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \frac{r}{1+r^2}\,d\theta \right) dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\ln|1+r^2|\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\ln 2$$

Bevis: Eftersom $f(x,y)$ är kontinuerlig & D är sluten & begränsad så antar $f(x,y)$ ett största & minsta värde på D.

Antag att detta max & min antas i (x_1,y_1) respektive (x_2,y_2) så:

$f(x_1,y_1) \le f(x,y) \le f(x_2,y_2)$ för alla $(x,y) \in D$

Det följer då att:

$$\iint_D f(x_1,y_1)\,dxdy \le \iint_D f(x,y)\,dxdy \le \iint_D f(x_2,y_2)\,dxdy$$

$$f(x_1,y_1)\underbrace{\iint_D dxdy}_{A(D) = \text{Arean av } D} \le \iint_D f(x,y)\,dxdy \le f(x_2,y_2)\underbrace{\iint_D dxdy}_{A(D)}$$

Division med arean av D ger:

$$\underbrace{f(x_1,y_1)}_{g(0)} \le \bar{f} \le \underbrace{f(x_2,y_2)}_{g(1)}$$

Eftersom D är sammanhängande så finns det en kurva $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $0 \le x \le 1$, i D så $x(t)$ & $y(t)$ är kont. & $(x(0),y(0)) = (x_1,y_1)$ & $(x(1),y(1)) = (x_2,y_2)$

Om vi nu sätter $g(t) = f(x(t),y(t))$, $0 \le t \le 1$, så är $g(t)$ kont.

Av ovan följer att: $g(0) \le \bar{f} \le g(1)$

Från satsen om mellanliggande värden följer då att det existerar en punkt t_0 så $0 \le t_0 \le 1$ för vilket $g(t_0) = \bar{f}$

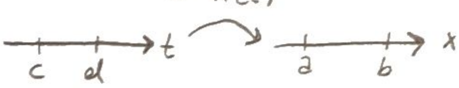
Om vi sätter $x_0 = x(t_0)$ & $y_0 = y(t_0)$ så är alltså $f(x_0,y_0) = \bar{f}$ ▨

Avs 14.4

Variabelsubstitution i enkelintegral

$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ x = x(t)}}{=} \int_c^d f(x(t))\,x'(t)\,dt$$

Intervallet, variabeln & dx ändras



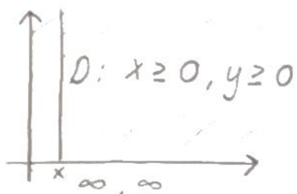
Matteföreläsning 3.4.1 Thomas $5/2$-18 Mån

Forts avs 14.3

Ex 1 $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = I$ Generaliserad för att D är obegränsat

Integranden är positiv så vi kan räkna "som vanligt"

Tips att ha med denna motivering på tentan!



$$I = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dy \right) dx = \int_0^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \arctan \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} \right]_0^\infty dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\pi/2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[\ln\left| x + \sqrt{1+x^2} \right| \right]_0^\infty = \infty$$

integralen är divergent.

Medelvärde av en integrerbar funktion $f(x,y)$ över ett område D är:

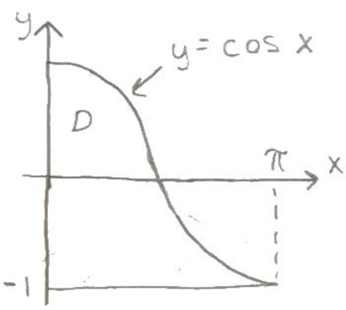
$$\bar{f} = \frac{1}{\text{arean av } D} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \frac{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \\ \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \end{array}}$$

Sats Medelvärdessatsen

Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på en $\overbrace{\text{sluten, begränsad}}^{\text{kompakt}}$ a sammanhängande mängd D så finns det minst en punkt $(x_0, y_0) \in D$ sådan att $f(x_0, y_0) = \bar{f}$

Ex 2 $f(x,y) = y \sin x$



$$A(D) = \text{Arean av } D = \iint_D dx\,dy = \int_0^\pi \left(\int_{-1}^{\cos x} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^\pi (\cos x + 1)\,dx = \left[\sin x + x \right]_0^\pi = \pi$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^\pi \left(\int_{-1}^{\cos x} y \sin x\,dy \right) dx = \int_0^\pi \sin x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^{\cos x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos^2 x \cdot \sin x - \sin x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos^3 x}{3} + \cos x \right]_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \quad \longrightarrow \bar{f} = \frac{-2/3}{\pi} = \frac{-2}{3\pi} \left(= f\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{2}{3\pi} \right) \right)$$