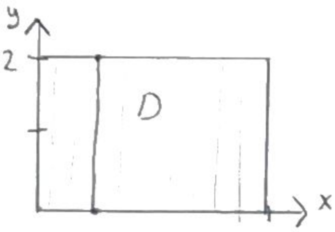
Avs 14.2

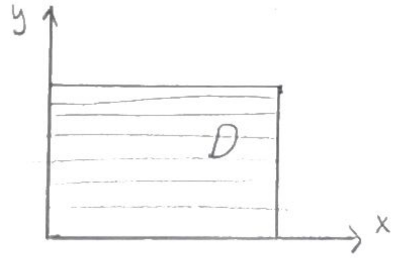
Ex 1 $\iint_D (30-x^2-3y^2)\,dx\,dy$, $D: 0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2$

① 

$$I = \int_0^3 \left(\int_0^2 (30 - x^2 - 3y^2)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^3 \left[30y - x^2 y - y^3 \right]_0^2 dx = \int_0^3 (60 - 2x^2 - 8)\,dx =$$

$$= \left[52x - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^3 = 156 - 18 = 138$$

② 

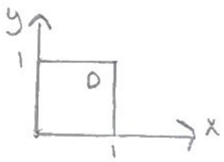
$$I = \int_0^2 \left(\int_0^3 (30 - x^2 - 3y^2)\,dx \right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left[30x - \frac{x^3}{3} - 3y^2 x \right]_0^3 dy = \int_0^2 (90 - 9 - 9y^2)\,dy =$$

$$= \left[81y - 3y^3 \right]_0^2 = 162 - 24 = 138$$

Ex 2 $\iint_D y\cos(xy)\,dx\,dy$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 (y\cos(xy))\,dy \right) dx = [\text{Partiell integration}]$$



$$= \int_0^1 \left[y\frac{\sin(xy)}{x} \right]_0^1 - \int \left(\frac{\sin(xy)}{x}\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\sin x}{x} + \left[\frac{\cos(xy)}{x^2} \right]_0^1 \right) dx = \int_0^1 \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right)}_{\text{saknar elementär primitiv funktion.}} dx$$

Vi prövar att integrera i omvända ordningen:

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 (y\cos(xy))\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[\sin(xy) \right]_0^1 dy = \int_0^1 \sin y\,dy = \left[-\cos y \right]_0^1$$

$$= 1 - \cos 1 \quad (\approx 0{,}46)$$

Matteföreläsning 3.3.4 Thomas 2/2-18 Fre

Dubbelintegraler

$z=f(x,y)$, volymen under grafen, D, beräknas med dubbelintegralen

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\underbrace{f(x_{ij}, y_{ij})}_{\text{höjd}} \underbrace{\Delta x_i \Delta y_j}_{\text{Arean av } R_{ij}}}_{\text{Volym av rätblocket över } R_{ij}}$$ Riemann summa

Def: Vi säger att $f(x,y)$ är integrerbar över rektangeln D & dubbelintegralen $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ har värdet I om $R(f,P) \to I$ då $\underbrace{\max_{ij}(\mathrm{diam}(R_{ij}))}_{\text{indelningens finhet}} \to 0$

indelningens finhet (rektanglarnas area går mot noll)

Om integrationsområdet D inte är rektangulärt så sätter vi:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R \hat{f}(x,y)\,dx\,dy}$$ där R är ett rektangulärt område som innehåller D &

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y) & \text{då } (x,y) \in D \\ 0 & \text{då } (x,y) \notin D \end{cases}$$

$$\boxed{\iint_D dx\,dy = \text{arean av } D}$$ → om funktionen är ett blir dubbelintegralen en area

Dubbelintegralen är linjär

$$\iint_D (Af(x,y) + Bg(x,y))\,dx\,dy = A\iint_D f(x,y)\,dx\,dy + B\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

Triangelolikheten viktig integralegenskap!

Udda egenskap: $f(-y) = -f(y)$, integralen av en udda & symmetrisk integral blir noll.

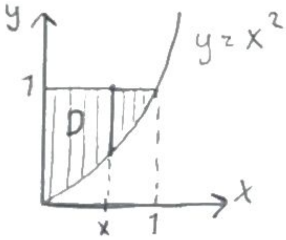
Allmän definition

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx}$$

Definition dubbelintegral av icke rektangulär graf:

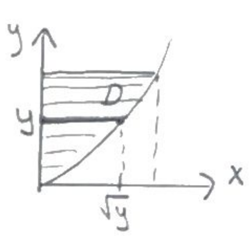
$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b\left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\right)dx}$$

Ex 3 $\iint_D \sqrt{y}\,dx\,dy$



$$I_x = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \sqrt{y}\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y^{3/2}}{3/2} \right]_{x^2}^1 dx = \int_0^1 \frac{2}{3}(1-x^3)\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left[x - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$



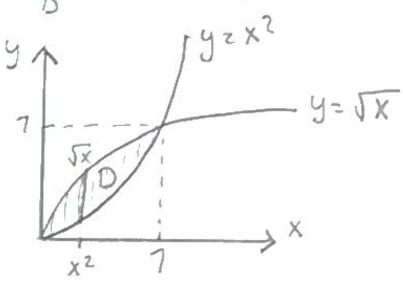
$$I_y = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} (\sqrt{y}\,dx) \right) dy = \int_0^1 \left[\sqrt{y}\,x \right]_0^{\sqrt{y}} dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

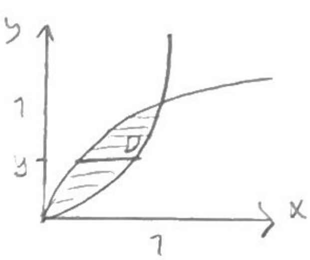
Avs 14.3

Om integranden $f(x,y)$ är obegränsad på D e/eller området D är obegränsat så säger vi att $I = \iint_D f(x,y)\,\underbrace{dx\,dy}_{dA}$ är generaliserad.

Om $f(x,y)$ inte växlar tecken på D (tex $f(x,y) \geq 0$ på D) så kan vi beräkna dubbelintegraler med samma metoder som ovan och vi säger att integralen konvergerar om $-\infty < I < \infty$ e divergerar om $I = \pm\infty$

Ex 4 $\iint_D 1/y\,dx\,dy$





Integralen är generaliserad ty integranden $1/y$ är obegränsad på D.

Integranden är dock positiv på D e vi har:

$$I_x = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1/y\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[\ln|y| \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{-3}{2} \ln x\,dx = -\frac{3}{2}\left[x \ln x - x \right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

$$I_y = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} (1/y\,dx) \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{y}(\sqrt{y} - y^2)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - y \right) dy = \left[2\sqrt{y} - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$