KAA052 18.03.22 Lv 4.1 F2 Anders Rasmuson

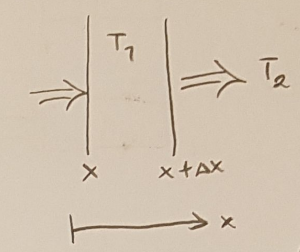
MODELLFORMULERING

EX| 1D, instationär värmeledning: plant: källterm S [J/m³,s]

$$\text{Ack} = \text{In} - \text{Ut} + \text{Prod}.$$

$$\rho c_p \Delta T (A \Delta x) = \underbrace{q_x \cdot A\big|_x \cdot \Delta t - q_x A\big|_{x+\Delta x} \cdot \Delta t}_{} + S \cdot A \Delta x \Delta t$$

tvärsnittsyta vinkelrät mot flödet



- dela med $A \Delta x \Delta t$:

$$\rho c_p \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{q_x\big|_x - q_x\big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + S$$

- låt $A\Delta x, \Delta t \to 0$:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} + S$$

- Fouriers lag: $q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}$

$$\Rightarrow \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + S$$

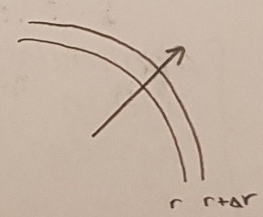
vanligt att k är konstant

typiska steg även i mer komplicerade modeller

- Behöver randvillkor:
behövs 2 i rummet & 1 i tiden (beror på derivataordning)

EX| Cylindriskt skal

$$\rho c_p \Delta T \underbrace{(2\pi r \Delta r l)}_{\text{volym}} = \underbrace{q_r \underbrace{(2\pi r l)}_{\text{yta}}\Big|_r \Delta t - q_r (2\pi r l)\Big|_{r+\Delta r} \Delta t}_{} + S (2\pi r \Delta r l) \Delta t$$



Se PP för $\underbrace{\text{Masstransport}}_{\text{både diffusion \& strömning}}$ balans i 3D!

Ficks lag: $J_{Ax} = -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial x}$

- I exemplerna tog vi allt från början, identifierade vilka mekanismer som var viktiga & ställde upp modell utifrån det.
- Man kan ju också använda modeller som redan är formulerade och gå från generellt till specialfall.

EX | Värmeledning

(Generell balans finns på PP)

Specifikt för vårt fall: 1D (x), strömning = 0

$$\Rightarrow \quad \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + S \qquad \text{(även } k = \text{konstant)}$$

Förenklingar kan t.ex. göras med dimensionslösa tal.

POPULATIONSBALANSER

- Balanser på ANTAL med en viss egenskap
  t.ex. massa, diameter, ålder

EX | Flockning (används typiskt i vattenreningssammanhang)
(se PP)

Diskret balans:

$$\underbrace{\frac{dn_k}{dt}}_{\text{ack.}} = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i+j=k} \alpha(i,j)\beta(i,j)n_i n_j}_{i + j \Rightarrow k} - \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i,k)\beta(i,k)n_i n_k}_{i + k \rightarrow > k} - \underbrace{\chi(k)n_k}_{\text{sönderfall av partiklar } n_k}$$

$$+ \underbrace{\sum_{i>k}^{\infty} \chi(i)n_i}_{\text{sönderfall av partiklar } i>k \text{ till storlek } k.}$$

n_k = antal flockar med storlek k

$\alpha(i,j)$ = kollisionseffektivitet

$\beta(i,j)$ = kollisionsfrekvens

— = två små partiklar i & j slås i hop & bildar en stor partikel av storlek k.

— = en partikel i kolliderar med k och bildar en partikel större än k.

Mer generellt:

- Balanser med egenskap $p_1, p_2, \dots$ (kan alltså vara fler än en)
- Antalsdistribution: $f(x, y, z, p_1, \dots, p_n, t)$

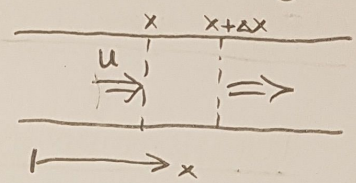
där $f \cdot \Delta x \Delta y \Delta z \, \Delta p_1 \cdot \ldots \cdot \Delta p_n$ är andel i volymen $\Delta x \Delta y \Delta z$ med egenskaper $\Delta p_1 \Delta p_2 \dots \Delta p_n$

Ex Celltillväxt

$u = \frac{dx}{dt}$; v = tillväxthastighet $= \frac{dm}{dt}$

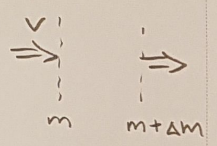
f = antal celler med viss massa/volym, massa

$$\left[\text{Ack} = \text{In} - \text{Ut} + \text{Prod}\right]$$



$$\left[\Delta f (\Delta x A) \Delta m = \underbrace{f u|_x \cdot A \, \Delta m \, \Delta t - f u|_{x+\Delta x} A \cdot \Delta m \cdot \Delta t}_{\text{strömning}} + \underbrace{\left(f v|_m - f v|_{m+\Delta m}\right) \Delta x A \Delta t}_{= \text{nettoflöde in med tillväxt}} + \underbrace{G (\Delta x A) \Delta m \Delta t}_{} \right]$$

(intervallmängd dvs litet mass-intervall kring den massa vi vill ha)



(G: antal producerade/vol, massa, tid)

- Dela m. $\Delta x A$, Δm, $\Delta t \longrightarrow 0$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial (f u)}{\partial x} - \frac{\partial (f v)}{\partial m} + G\right]$$

Se PP för generell balans samt $\underbrace{\text{makroskopisk balans}}_{\text{ger samma ekvationer som uppehållstids-teori}}$.